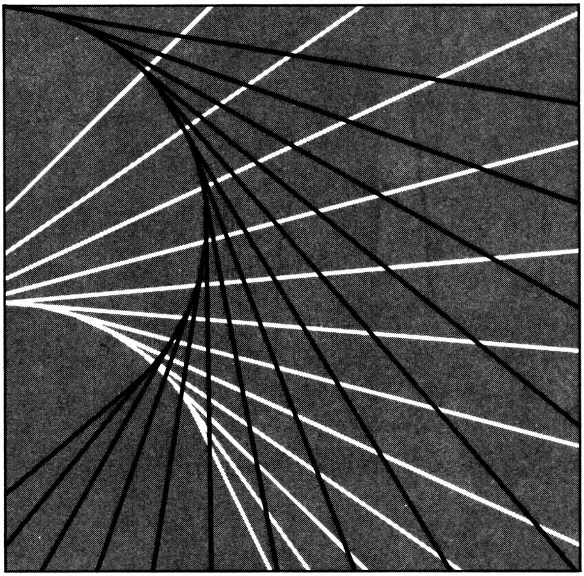
超準解析

APPLIED NONSTANDARD ANALYSIS

M.デービス著　難波完爾訳

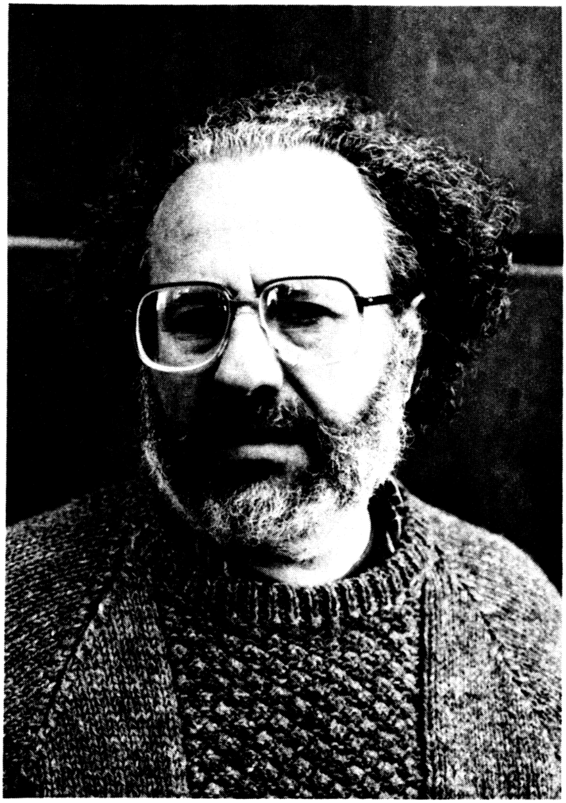


培風館

APPLIED NONSTANDARD ANALYSIS

by

Martin Davis



I send my best wishes to Japanese readers of my "Applied Nonstandard Analysis."



Martin Davis

まえがき

超準解析 (nonstandard analysis) においては，数理論理学の一つの重要な分野である模型の理論の手法を用いて，数学的な論理関係の世界を，いわゆる無限小および無限大の元を含む〝超準的宇宙〃の中に埋め込むということがなされる．

この本の目的は，このような超準解析の手法を前もって論理学の知識をもっていない読者にも理解して用いられるようにすることである．そして全体を通して超準解析を〝通常〃の数学へ応用することに重点をおいた．

超準的宇宙の内部のことやそれ自身の研究もさることながら，超準解析は色々広い分野の人々から深い興味をよせられているので，予備知識はできる限り少なくして，読み進むことができるよう心がけた．前半の三章については群，環および体に関する最も簡単な性質と，ε-δ 式の記述法等に関する知識で十分であり，後半の二章については，有限次元の線形代数の基礎知識を仮定している．

前半三章で強調されていることは，自然で直観的にも示唆的な結果の証明で，通常の数学での証明はもう少し複雑と思われるものである．後半二章では通常の方法と超準的方法が便利な記述法として自由に用いられ，函数解析の知識を仮定しないで，線形作用素に関する結果を得ている．特に，Hilbet 空間における多項式的に compact な作用素に対する不変部分空間の存在に関する Bernstein-Robinson の証明についても記しておいた．

この本の内容は Coulant Institute および University of Brtitsh Columbia で行なった大学院の講義を発展させたものであり，学部での進んだ講義とか，大学院での教科書として用いられるように書かれたものである．そして，私の講義に出席してくれた学生や同僚の方々からは色々の意味で得るところがあった．特に Peter Gilkey, Melvin Hausner そして David Russinoff の各氏より寄せられた注意は大変によい助けとなった．また，Barry Jacobs 氏による講義の

ノートがなかったら，この本は書かれなかったであろうと思っている．終りに，下書きをいつもの申し分ない要領でタイプして下さったConnie Engleさんに感謝していることをよろこんでここに記しておきます．

超準解析という分野はAbraham Robinsonほとんど一人によって生み出されたといってもよいくらいです．そして，彼の時ならぬ死からまだあまり時間はすぎていませんが，彼の死は数学における本当に大きな損失であった．ここに述べられた結果で特に記されていないものはすべて彼によっていると考えてよいでしょう．

ここで用いられている方法というのが，かっては，厳密性という意味も含めあまり評判の良くなかった無限小を用いる方法を，正当化するための必要から，解析学の内部に絶対的厳格さを求めて，止むに止まれず，少なくとも部分的にはそのようなことから，開発された数理論理学のその手法によっているというのは歴史上の大きな皮肉でしょう．しかし，正直なところ，超準解析の方法を自由な形で理解したいと願う気持ちは，このようなよく知られた禁断のよろこびとは無関係ではないが，むしろ，ここで用いられる方法の数学的単純さ端正さそして美しさとその応用の深さによるところが大きいのではないかと思う．

Martin Davis

New York
1976年11月

訳者序文

nonstandard analysis (超準解析) なる語は，通常の数学の対象が standard (標準的) とよばれるのに対比してよばれるもので，A. Robinson の著書 *Non-standard analysis* (1966, North-Holland) によって広く知られるようになった．1930年の前後数年のことであるが，群，体とか位相空間のような数学の通常の対象に加えて，それを特徴づける公理とか推論法則をも対象とした研究がなされ，Th. Skolem の定理，K. Gōdel の完全性定理，不完全性定理など内容と形式の根底にあるものが少しづつ理解されるようになったのである．

例えば，実数の理論においても，我々が素朴に思いおこすことの出来る実数 $\boldsymbol{R}$ (これが standard なもの) と少なくとも形式的には区別不可能な数の体系で，しかも $\boldsymbol{R}$ と異なるもの (すなわち non standard なもの) が存在すること，そしてそれがどのようにして何によって構成されるか等のことが少しづつ理解されるようになった．もちろん，このような体系の中では無限大 (infinite) とか無限小 (infinitesimal) 等の概念は自然なものとして必然的に入ってくるのである．

さて，Newton とほぼ同じ時期に Leibniz は微分積分学の記述にあたって，基本的概念として無限大と無限小の数を含む体系を考えて多くの成果を得たのであるが，その概念の基礎づけにおいては確たるものを得たわけではなかった．A. Robinson は，これらの情況を考えて1960年の前後に，実数，Hilbert 空間，測度とか位相空間等々の具体的数学の概念とそれを記述している公理とか推論などの形式的体系の組織的研究の必要性と可能性について考え，そしてそれを実行に移したのであった．それは何個かの性質，すなわち公理系で記述出来る体系，すなわち model の全体は，例えば ultra product (超積) のような極限への移行で閉じているというような性質に着目して，与えられた体系についての性質を知ろうというものである．このような方向は，一般的には，すでに良く知られた素イデアルの全体とか準同型対応の全体を考えたりする，いわゆる双対空間の概念に入るものであろうが，一般的性質から個々の具体的例への移行は

仲々に大変なのである.

ともあれ，このような観点から何個かの具体的で深い数学の成果が得られているが，M. Davis の本書，*Applied Nonstandard Analysis* は数学の具体的展開を主として Hilbert 空間の作用素を例にとりながら，このような視点から記述したもので，対象の構造と形式の記述がよく調和したよい入門書であると思う．Davis は *Computability and unsolvability* (1958. McGraw-Hill, 渡辺・赤 訳：「計算の理論」) でもよく知られ，また Hilbert の第 10 問題に対しても深い研究をして，その解法の第一歩をなした人でもある.

さて，双対ということについて少しふれたが，これは広い意味での境界値ということにも関係している．前述の A. Robinson の本の序の中での K. Gödel のことばとしてあるように，自然数，整数，有理数そして実数の導入の各段階の後に来たるべき自然な拡大は何であろうか．このような視点に対する検討が可能な時期に来ているのではないかとも思う．このような意味でも，この本が広い層の人々に読まれ理解，批判そして改良されることを期待している.

訳本に当っては，注意はしているものの，私の考え違いや不注意から思わぬ誤訳や欠落があるかも知れない．そのために文派が理解出来ないというような場面にあうかも知れない．その時は原本に，そして出来れば原論文に当って頂き度い．そこには発見の時の意図とか感動がしばしば読みとれるであろうし，それはより深い理解と新しい発見へのよい助けとなることであろう.

終りに，色々の意味で教え そして勇気づけて下さった竹内外史，稲垣武，岩村聯，竹之内脩の各先生方はじめ多くの先達，友人の方々には心より感謝している．また編集部の横山伸氏には初めから終りまで世話になり心より有難く思っている.

難波　完爾

1982年 9 月26日

目　次

諸記号表

$\mathscr{P}(A)$	Aの巾集合	6
$\langle a, b\rangle$	aとbの順序対	6
$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$	順序n重対	6
$g[C]$	集合Cの函数gによる像	7
N	自然数全体の集合	7
N^+	正整数の全体	7
$\bigcup_{i\in I} X_i$	添字集合族の和集合	7
$\bigcap_{i\in I} X_i$	添字集合族の共通部分	7
$\prod_{i\in I} X_i$	添字集合族の直積集合	8
μ_F	超フィルターによって定まる測度	12
$\hat{S}$	Sを個体としてもつ上部構造	14
$r \upharpoonright s$	$r(s)$が一意的に定まるときのみその値をとる	17
a.e.	ほとんど到るところ (almost everywhere)	18
$\mathscr{L}_U$	宇宙Uに対応する言語	23, 24
$\|\mu\|_U$	Uの中での $\mathscr{L}_U$ の値	26
$U\models\alpha$	文章 α はUの中で正しい	26
$U\not\models\alpha$	文章 α はUの中で偽である	27
$\mathscr{L}$	標準宇宙 (standard universe) に対応する言語	28
$^*\mathscr{L}$	超準宇宙 (nonstandard universe) に対応する言語	28
$^*\lambda$	$\mathscr{L}$ の項または論理式の$^*\mathscr{L}$ の中での値	28
$^*A$	標準宇宙の定義可能な部分集合Aに応ずる	
	超準宇宙での部分集合	33, 34
Q	有理数の順序体	50
F, I	有限集合の全体，無限小元の全体	52
	超実数の順序体の意味に用いることもある	61
$x\approx y$	xはyに無限に近い	53, 85, 100
$^\circ x$	Fの元xの F/I への自然準同型による像	53
	超実数xの標準部分	61
	近準点の標準部分	101
R	実数の順序体	60, 61

R^+	正実数全体の集合	63
$[a, b]$	a, b を端点とする閉区間	64
$s_n(x) \Rightarrow s(x)$	$s_n(x)$ は $s(x)$ に一様収束する	69
$f \sim g$	局所写像 f, g は同値である	71, 132
$\mathscr{O}$	位相空間における開集合の集り	85
$\mathscr{O}_p$	p の開近傍の集り	85
$\mu(p)$	p の単子 (monad)	85
$\rho(x, y)$	距離空間における x と y の距離	99
$B_\mu(r)$	p を中心に r を半径とする開球	99
$\|x\|$	x のノルム	117, 127
$\mathscr{C}[\mathscr{B}]$	実数の区間からバナッハ空間 $\mathscr{B}$ への連続写像	126
$\mathscr{S}$	実数の区間での階段函数から成るバナッハ空間	127
(a, b)	ユニタリ空間での内積	137
δ_m^n	Kronecker のデルタ	138
$a \perp b$	a と b は直交する	138
$T_1 \leq T_2$	ユニタリ空間のエルミート作用素の順序	139
l^2	複素数の無限列より成る Hilbert 空間	139
P_n	l^2 から n 次元線形部分空間への射影	146
$\mathrm{span}(t_1, \cdots, t_n)$	$t_1, \cdots, t_n$ で張られる線形空間	148
P_E	閉線形空間 E への射影子	150
$E^\perp$	閉線形空間 E の直交補空間	150
$A \perp B$	線形部分空間 A, B は直交している	152
$G = A \oplus B$	直交閉部分空間 A, B の直和	152
W	無限固有値に応ずる添字の集合	172

序　論

1．なぜ超準解析なのか？

超準解析というのは一つの研究の主題というよりはむしろ主題についての技術である．超準解析での概念には，それと同値な通常の数学での概念が存在することを示す定理がある．ともかく，ここで得られるすべての結果は通常の方法で証明可能なのである．

したがって，問題は，それがより簡単で親しみやすい説明を与えること，そしてもっと大切なことは，数学的発見に導くことであって，そのような意味での重要性を有しているのである．

はじめの方に関しては読者に判断して頂かねばならないが，次のものについては，多年未解決のままであった無限次元線形空間の不変部分空間に関する問題に解決を与えたベルンシュタイン•ロビンソンの理論が一番よい例であろう．今ではこれらの結果の相当に簡単な証明が知られているが，それでも，ここではその一部をもとの形で展開してみようと思う．それが最初の発見の道筋であったということもあるが，それらが無限次元線形空間を，有限次元線形代数の結果が応用できるような空間で，近似するという真にすばらしい着想を見るよい機会を与えてくれるからである．

2. 理想元としての無限小

超準解析の研究それ自体は，数学的にはいわゆる理想元を用いる方法に属している．これは時間と共にその深い意味が理解されるような数学的着想である．そして数学的対象に関する理論が，理想的元が存在すると仮定することによって簡単になるということである．例えば，代数的整数をイデアルの特別のものと見なすとか，複素数の構成とか，射影幾何学における無限遠点の導入等である．

超準解析においては，我々が関係している対象に無限に近い元とか，同様に無限に遠く離れた理想元などが含まれるように導入される．これらの考え方を微分積分学の展開に最初に用いたのはライプニッツであった．これはよく直観に訴えるやり方ではあったのだけれども，無限小に関する理論の数学的に健全な基礎を与えるということは不可能に見えた．

代数的には，実数体を無限小元を含む体（代数学のことばで非アルキメデス的体とよばれるもの）の中に埋め込むことには何の困難もない．しかし超越的な函数を取扱うことになるとすぐに困難に出合うことになる：すなわち $\sin x$ をライプニッツ流に微分しようとすると，次のように書くことになろう：

$$\sin(x+dx)-\sin x=\sin x(\cos dx-1)+\cos x\sin dx$$

ここに dx は無限小である．しかし，これを書くためには正弦函数が 実数＋無限小 の形の数に対して定義されることと，正弦函数の加法公式がここでも成立しなければならない．（複素函数論では，このような問題が解析接続とか式の形の不変性に導く）そして正にこの問題に近代論理学，詳しくはモデルの理論が，鍵を与えていることがわかってきたわけである．

3. 論理学の役割

ライプニッツは通常の数の有する性質をすべて有し，しかも無限小元を含む数の体系を仮定した．だからライプニッツにとっては上述の $\sin x$ の微分法等は全く問題のないことであったわけであるが，しかしライプニッツの考え方は字面からしても矛盾を含むものである．それは通常の数の性質には少なくとも一つライプニッツが考えている拡大体では成立しないものがある．というのは通常の実数の中には無限小のものは存在しないからである．

しかし，このような不都合は形式的言語を近代的論理学の意味で明確に述べることによって避けることができる(計算機の言語ではみじめなほどに厳密である)．だからライプニッツの原理の新しい解釈は：

実数の理論の拡張で無限小元を含み定められた形式的言語で表現することのできる性質については実数の全体と同一の性質を有するものが存在する

ということである．だから無限小元の存在という性質は上記の意味では表現できないことになるし，また，無限小元の全体の集合は"外的"†な，集合であることを知ることになるわけである．

4. 三つの技法

超準解析においては二つの体系が取扱われる．すなわち標準的体系(または宇宙)(standard universe)と超準的体系(non-standard universe)である．それとは別に一つの形式的言語があって，上記の二つの体系について述べることができるが，その意味はそれぞれの体系によって決るようになっている．

超準解析の主要な道具は次の三つのものである．

第1に**移行の原理**(transfer principle)，これは簡単にいって，定められた形式的言語で記述できる性質については標準的体系で成立することと超準的体系で成立することが同じであるということである．この性質の典型的な用い方は，形式的言語で記述できる性質が，超準的体系で成立するから標準的体系でも成立するというものである．

次は**共起性**(concurrence)である．これは拡大された体系が可能なすべての完備化とかcompact化を含んでいることを保障する論理的な手法である．

第3のものは**内的であること**(internality)である．すなわち，超準的体系に属する集合Sが内的(internal)というのは，それ自身標準的体系に属することであり，そうでないとき外的(external)であるとよばれる．同一の集合が同時に外的であり内的であるというような性質をある仮定から導いて，いわゆる帰謬法を用いて，最初の仮定の否定を得るというような証明の方法が驚く程に有効なのである．

---

†[訳注]　定められた形式的言語での性質$P(x)$を用いて，$\{x|P(x)\}$のように記される集合を"**内的**"(internal)集合，そうでない集合を"**外的**"(external)集合とよぶ．

もちろん，上で述べてきたことはほんのあらましであって，読者諸氏はいずれはっきりした詳しい記述が与えられるまでは，これらに関することがはっきりと理解できると期待しない方がよいであろうと思う.

5. 数理論理学と厳密性

数学者は彼等の専門の分野での数学的説明には通常の意味での厳密性で完全に満足しており，哲学的な意味での不安にもめったに煩わされることもないが，ときに数理論理学を用いるとき同じ規準にしたがうときに痛切ないらだちの徴候を示すことがある．だから少し注意しておくのであるが，論理は数学の基礎づけの基本的論点の議論には重要ではある．しかし，このような論点が数理論理学が他の数学的技術と同じように用いられているところまでもちこまれる必要はないのである.

超準解析における論理の使用法というのは，数学における幾何学的言語の使用法と同じである．形式的言語の "文章"（技術的にいって，"文章" とは単に記号とよばれる対象の有限列）の中に直観によって，その "意味" を読みとるのであるが，それは文章の表を一つ一つ確かめることによって幾何学的正しさを認識することができるという直観によく比することができよう．同じような説明上の問題に二つの場合がある．それは，あることの解析的で詳細な証明を書くような場合，それがどんなことか分ってしまうと，退屈で報いの少ないものになってしまうといったこと，また，形式的言語の特定の文章が直観的に述べたいと思っている内容を "述べて" いるという詳しい証明を与えるときにも同様なことがある．読者諸氏はそれが必要でないと思われるときはそのような証明は無視して頂き度いし，また，ほとんど疑う余地がないくらい明らかな事柄であって証明が略されてあるときには，それを補って下さることを勧めたい.

6. 定理の番号づけ

定理 2-8.1 と引用したときは，第 2 章の定理 8.1，すなわち第 2 章第 8 節の最初の定理の意味である．同じ章の中での定理の引用については章の部分は省略する．すなわち，第 2 章の中で定理 7.2 といえば定理 2-7.2 のことである.

1 全空間†と言語

1. 集合と関係

我々は，超準解析を展開するに当って，数学者が取扱う対象物とか関係はすべて適当な方法で一つの集合として構成することができる，という便利な事実を用いることにする．そこで，我々がこれから用いる素朴集合論の概念について手短かに述べることから始めよう．

x が集合 A の元であることを $x \in A$ と記し，そうでないとき $x \notin A$ と記す．二つの集合 A, B に対して $A \subseteq B$ または $B \supseteq A$ と記すと，すべての x に対して $x \in A$ ならば $x \in B$ を意味する．そして $A \subset B$ または $B \supset A$ の意味するところは $A \subseteq B$ ではあるが $A \neq B$ となることである．

特定の集合を定義するときには

$$\{x \mid \cdots\}, \qquad \{x \in A \mid \cdots\}$$

のような通常の記法を用いる．頂度 $a_1, \cdots, a_n$ を元として有する有限集合は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ と記される．空集合は ϕ と記され，それは元をもたない唯一の**集合** (set) である．また，その他の対象，すなわち**個体** (individual) とよばれるもの

†[訳注]　universe 宇宙，万物，全世界 等．

も考える．それらは元をもたない．したがって，それらは集合ではあり得ない．

集合 A に対して

$$\mathscr{P}(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$$

と記して，$\mathscr{P}(A)$ を A の**巾集合** (power set) とよぶ．

任意の対象 a, b に対して

$$\langle a, b\rangle=\{\{a\},\{a, b\}\}$$

と記し，$\langle a, b\rangle$ を a と b の**順序対** (ordered pair) とよぶ．この定義は何もこれでなくてもよいと思われるが，"順序対" という名は次の性質によっている．

補題　$\langle a, b\rangle=\langle a', b'\rangle$ は $a=a'$ かつ $b=b'$ と同値である．

証明　与えられた関係は

$$\{\{a\},\{a, b\}\}=\{\{a'\},\{a', b'\}\}$$

である．集合の等号はその元が等しいことを意味するから，二つの場合を考える．

場合 1　　$\{a\}=\{a'\}\qquad\{a, b\}=\{a', b'\}$

このときは $a=a'$ であり，したがって $\{a, b\}=\{a, b'\}$，$a\neq b$ とすると $\{a, b\}$ は二つの元をもち $\{a, b'\}$ も二元をもつので $b=b'$ である．もし $a=b$ とすると $a=b'$ で，この場合も $b=b'$ である．

場合 2　　$\{a\}=\{a', b'\}\qquad\{a, b\}=\{a'\}$

このときは $a=a'=b'$ であり $a'=a=b$ であるから，$a=a'$ かつ $b=a'=b'$ である．□

(順序) n 重対 $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ を $n>2$ に対して帰納的に定義する．すなわち

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle=\langle\langle x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$$

このようにすると帰納法で明らかなように $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle=\langle y_1, \cdots, y_n\rangle$ が成立することと $x_1=y_1, x_2=y_2, \cdots, x_n=y_n$ が成立することは同値である．$n=1$ の場合も含むように $\langle x\rangle=x$ としておく．任意の集合 X に対して，次のように記す．

$$X^n=\{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle \mid x_1, \cdots, x_n\in X\}$$

集合 A と B に対して，次のように記す．

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \text{ かつ } y\in B\}$$

もし $R\subseteq A\times B$ であれば R は**関係** (relation) とよばれる．$A=B$ のときには R は A 上の**関係** (relation on A) ともいわれる．関係 R については $\langle x,y\rangle\in R$ は xRy と記されることもある．　関係 R の定義域 (domain)(dom(R) と記す)

は xRy が成立する y が存在するような x の全体の集合のことである.

$g \subseteq A \times B$ (g は関係) であって各々の $x \in A$ に対して $\langle x, y \rangle \in g$ なる $y \in B$ が頂度一つ存在するとき, g は A から B への**函数** (または**写像**)(function, mapping from A into B) とよばれる. $x \in A$ に対して $g(x)$ で, $\langle x, g(x) \rangle \in g$ となる B の唯一の元を記す. $C \subseteq A$ に対して

$$g[C] = \{g(x) \mid x \in C\}$$

と記し, $g[C]$ を C の g による**像** (image) とよぶ. ここに $A = \mathrm{dom}(g)$ で g の定義域であり, 集合 $g[A]$ は g の**値域** (range) とよばれる. $g[A] = B$ が成立するとき g は A から B の**上への** (onto) 写像とよばれ, さらに, $g(x) = g(y)$ ならば $x = y$ のとき g は **1 対 1** (one to one) であるとよばれる.

f が X^n から Y への函数のとき, f は X から Y への ***n* 項函数** (または ***n* 変数函数**)(n-ary function ; function of n arguments) とよばれ $f(\langle x_1, \cdots, x_n \rangle)$ の代りに $f(x_1, \cdots, x_n)$ と記す.

この本を通じて, N で $\{0, 1, 2 \cdots\}$ なる**自然数** (natural numbers) または負でない**整数** (non-negative integers) の集合を記す. N^+ では $\{1, 2, 3, \cdots\}$ なる正整数の全体の集合を記す.

場合によって, 函数の定義域や値域にはあまり関心がないとき, 記法や言語を変えることもある. 函数の定義域のことを**添字集合** (indexed set), そして函数の代りに**添字付集合族** (indexed family) といわれる. すなわち添字集合 I をもつ添字集合族は頂度 I を定義域とする函数 X のことである. このような場合, 各 $i \in I$ に対して $X(i)$ の代りに X_i と記し, その集合族自体 (すなわち函数)$\{X_i \mid i \in I\}$ と記される. 前後関係から添字集合が明らかなとき単に $\{X_i\}$ のようにも記される. 添字集合が $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ または $\{0, 1, \cdots, n\}$ のような形のときは, その集合族は**有限列** (finite sequence) とよばれ, 添字集合が N または N^+ のときは**無限列**(infinite sequence) とよばれる.

$\{X_i \mid i \in I\}$ を添字付集合族, すなわち各 X_i が集合とする. このとき次のように記す.

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$$

$$= \{z \mid \text{ある } i \in I \text{ に対して } z \in X_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \{X_i \mid i \in I\}$$

$$= \{z \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } z \in X_i\}$$

$$\prod_{i\in I} X_i = \prod\{X_i \mid i \in I\}$$
$$= \{g \mid g \text{ は } I \text{ を定義域とする函数で，各 } i \in I \text{ に対して } g(i) \in X_i\}$$

そして，それぞれ与えられた集合族の**和**(union)[†]，**共通部分**(intersection) そして**デカルト積**(Cartesian product)[††] という．特に $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ のとき，

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \bigcup_{i\in I} X_i$$
$$X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n = \bigcap_{i\in I} X_i$$
$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \prod_{i\in I} X_i$$

A および B を集合とするとき次のように記す．

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$i \in I$ のとき $A_i \subseteq U$ ならば，次のドモルガン[†††]の等式は容易に確かめられる

$$U - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (U - A_i)$$
$$U - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (U - A_i)$$

2. フィルター

我々は“超準的全空間”を構成するとき，フィルターの非常に簡単ないくらかの性質を用いる．そこで必要なことがらの展開から始めよう．

定義　I を空でない集合とするとき，$F \subseteq \mathscr{P}(I)$ は次のようなとき I 上の**フィルター**(filter on I) とよばれる．

（1）　$A \in F$ かつ $A \subseteq B$ ならば $B \in F$

（2）　$A, B \in F$ ならば $A \cap B \in F$

（3）　$\phi \notin F$，$I \in F$

もちろん，性質(2)よりフィルターの元の有限個の共通部分は再びそのフィルターに入る．

例　$A_0 \subseteq I$，$A_0 \neq \phi$ とするとき，すぐにわかるように

$$F = \{A \in \mathscr{P}(I) \mid A_0 \subseteq A\}$$

は I 上のフィルターである．

---

†[訳注]　合併集合ともいう

††[訳注]　R.Descartes (1596-1650)　直積 (direct product) ともいう

†††[訳注]　A. de Morgan (1806-1871)

定義 F は次のようなとき**超フィルター** (ultra filter)† という.

(1) F は I 上のフィルターである.

(2) $F \subseteq F_1$ で F_1 が I 上のフィルターであれば $F=F_1$ である.

例 任意の $x \in I$ に対して, $A_0=\{x\}$ とするとき, 集合族

$$F=\{A \in \mathscr{P}(I) \mid A_0 \subseteq A\}^{\dagger\dagger}$$

は超フィルターである. それは $F \subset F_1$ で $A \in F_1-F$ とすると, $x \notin F$ である (そうでないとすると $A \supseteq \{x\}$ であり $A \in F$ となる). だから $A \cap \{x\}=\phi \in F_1$ となり F_1 がフィルターでなくなる.

超フィルターの存在に関して基本的なことは:

定理 2.1 F_0 を I 上のフィルターとするとき, I 上の超フィルターで $F \supseteq F_0$ となるものが存在する.

この定理は技術的には, いわゆる選択公理††† の弱い形である. 少し詳しく記すと次のようなことが知られている.

(1) 定理 2.1 は選択公理のない集合論では証明できない.

(2) これは選択公理を用いて証明できる.

(3) これは選択公理より弱い. すなわち定理 2.1 を仮定しても選択公理は導かれない.

下記で与えられる証明では, 選択公理と同値で手軽に用いられるツォルン†††† の補題を使う. もちろん, ここでの証明と関係なく, 定理 2.1††††† をそれ自身集合論の公理として用いる方を好まれるかも知れない. それはそれで

---

†[訳注] **極大フィルター** (maximal filter) ともいう, **素フィルター** (prime filter) も同様に重要な概念である.

††[訳注] このようなフィルターを主フィルター (principal filter) とよぶ. 一つの "点" に対応している

†††[訳注] axiom of choice, E. Zermelo (1871-1953) によるという.

$$\forall x \in a \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x \in a\, P(x, y(x))$$

††††[訳注] Max Zorn この結果はあまりにも有名であるために E. Zermelo と同時代の人と見られたり, この定理 "のみ" によって有名などと考えられたり本人は迷惑しているとの話もある. 現在 Indiana 大学教授.

†††††[訳注] 素イデアル定理 (prime ideal theorem) 任意の I に対して $2=\{0, 1\}$ の直積空間 $X=2^I$ がコンパクトというのと同値. これに対して選択公理は X_i $(i \in I)$ が compact とするとき, $X=\prod_{i \in I} X_i$ が compact という A.Tychonoff の定理と同値である.

大いに結構なことである．事実，このようにすることも技術的に利点がある．すなわち，選択公理を用いて，古典的な方法で証明できる結果（例えば，実数のルベーグ非可測集合の存在†）も場合によっては，超準的な証明が与えられるときは，より弱い性質である定理 2.1 のみによっているわけである．しかしここではこれに深入りすることは控えておこう．

証明　集合族 $\mathscr{G}$ を

$$\mathscr{G}=\{G\supseteq F_0 \mid G \text{ は } I \text{ 上のフィルター}\}$$

として，この集合族にツォルンの補題を用いる．すなわち，集合族 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{G}$ が空でなく，順序関係 $\subseteq$ によって線形に順序づけられている（すなわち，$G_1, G_2\in\mathscr{D}$ ならば $G_1\subseteq G_2$ または $G_2\subseteq G_1$）とする．いま $\tilde{G}=\bigcup_{G\in\mathscr{D}} G$ とすると，すべての $G\in\mathscr{D}$ に対して $G\supseteq F_0$ であるから $\tilde{G}\supseteq F_0$ である．

（1）　もし $A\in\tilde{G}$ かつ $B\supseteq A$ とすると，$A\in G$ となる $G\in\mathscr{D}$ が存在するから，G がフィルターであることを用いると $B\in G$ となり $B\in\tilde{G}$ を得る．

（2）　$A, B\in\tilde{G}$ とすると，$A\in G_1, B\in G_2$ となる $G_1, G_2\in\mathscr{D}$ がある．$\mathscr{D}$ は $\subseteq$ によって線形に順序づけられているので $A, B\in G_1$ または $A, B\in G_2$ である．よって $A\cap B\in G_1$ または $A\cap B\in G_2$ であり $A\cap B\in\tilde{G}$ を得る．

（3）　もし $\phi\in\tilde{G}$ とすると $\phi\in G$，$G\in\mathscr{D}$ となる G が存在することになるが，それは不可能である．すべての $G\in\mathscr{D}$ について $I\in G$ であるから $I\in\tilde{G}$ である．

これより $\mathscr{D}$ は $\mathscr{G}$ の中に上界を有することが示された．そこでツォルンの補題を用いると，$\mathscr{G}$ の中に極大元 F が存在する．すなわち $F\in\mathscr{G}$ であり $F\subseteq F_1\in\mathscr{G}$ であれば $F=F_1$ となる．$F\in\mathscr{G}$ であるから $F\supseteq F_0$ で F はフィルターである．もし $F\subseteq F_1$ で F_1 を I 上のフィルターとすると $F_1\in\mathscr{G}$ であるから $F=F_1$ となり証明できた．□

定義　$G\subseteq\mathscr{P}(I)$ は次の条件が満足されるとき，I 上の**フィルター基**（filter basis on I）とよばれる．

（1）　$\phi\notin G$

---

†[訳注]　H. Lebesgue(1875-1941) の意味で非可測集合の存在は最初 G. Vitali (1875-1932) によって 1905 年に $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}$ の代表元の全体として与えられた．F を $\mathscr{P}(N)$ の non-principal ultrafilter とすると，$a\subset N$ について $a^*=\sum_{n\in a}\frac{1}{2^{n+1}}$ とするとき，$F^*=\{a^*\in\boldsymbol{R}\mid a\in F\}$ は内測度 0，外測度 1 で非可測である．

（2） $A, B \in G$ ならば $A \cap B \in G$

（3） $G \neq \phi$

定理 2.2 G を I 上のフィルター基とするとき, $F \supseteq G$ となる I 上のフィルター F が存在する.

証明

$$F = \{A \subseteq I \mid \text{ある } C \in G \text{ に対して } A \supseteq C\}$$

とおくと明らかに $G \subseteq F$ であり, 次のようにして F がフィルターであることがわかる.

（1） $A \in F$ かつ $B \supseteq A$ とする. このとき $C \in G$, $A \supseteq C$ となる C が存在するから $B \supseteq A$ によって $B \supseteq C$ であり, $B \in F$ を得る.

（2） $A, B \in F$ とすると $C_1, C_2 \in G$ で $A \supseteq C_1$ かつ $B \supseteq C_2$ となるものがある. それゆえ $A \cap B \supseteq C_1 \cap C_2$ であり, G がフィルター基であることより $C_1 \cap C_2 \in G$ であるから $A \cap B \in F$ を得る.

（3） $\phi \in F$ とすると $\phi \supseteq C$ なる $C \in G$ があるが, これは $\phi \in G$ を意味し, G がフィルター基であることに反する. 終りに $G \neq \phi$ であるから, $C_0 \in G$ をとると $I \supseteq C_0$ であり $I \in F$ を得る. □

定理 2.1 と定理 2.2 によって極大フィルターに関する基本的結果を得る.

系 2.3 G を I 上のフィルター基とするとき, I 上の極大フィルター F で $F \supseteq G$ となるものが存在する.

定理 2.4 F を I 上の極大フィルターとすれば, 任意の $A \subseteq I$ に対して $A \in F$ または $I - A \in F$ であり, その一方のみが成立する.

証明 $A \notin F$ かつ $I - A \notin F$ と仮定する. そして

$$G = \{X \subseteq I \mid A \cup X \in F\}$$

とおく. $G \supseteq F$ を示して矛盾を導くことにする. そこで $X \in F$ とすると, $X \subseteq A \cup X$ で F はフィルターであるから $A \cup X \in F$, よって $X \in G$ である. 次に G がフィルターであることを示す:

（1） $X_1 \in G$ で $X_1 \subseteq X_2$ とする. $A \cup X_1 \subseteq A \cup X_2$ および $A \cup X_1 \in F$ より $A \cup X_2 \in F$ であり, したがって $X_2 \in G$ を得る.

（2） $X_1, X_2 \in G$ とすると $A \cup X_1, A \cup X_2 \in F$ である. F がフィルターであることより

$$(A \cup X_1) \cap (A \cup X_2) \in F$$

である. しかし

$$(A \cup X_1) \cap (A \cup X_2) = A \cup (X_1 \cap X_2)$$

であるから $X_1\cap X_2\in G$ を得る．

（３） $\phi\in G$ とすると $A\cup\phi=A\in F$ となり F に対する仮定に反する．また $A\cup I=I\in F$ より $I\in G$ を得る．

これらより G はフィルターで $G\supseteq F$ となる．F が極大フィルターであるから $F=G$ を得る．そして

$$A\cup(I-A)=I\in F.$$

定義 F を I 上の極大フィルターとして

$$\mu_F(A)=\begin{cases}1 & A\in F\\ 0 & A\notin F\end{cases}$$

とおく．この μ_F は $\mathscr{P}(I)$ から $\{0,1\}$ への写像であるが，それを F で定められた**測度** (measure) という．F がはっきりしているときは μ_F を単に μ と記すこともある．

定理 2.5 $\mu(\phi)=0,\ \ \mu(I)=1$

証明 μ_F の定義より明らかである．□

定理 2.6 もし $\mu(A_i)=0,\ \ i=1,\cdots,n$ ならば

$$\mu(A_i\cup\cdots\cup A_n)=0$$

証明 定理 2.4 によって

$$I-A_i\in F\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

したがって，$J=\{1,2,\cdots,n\}$ とおくと

$$\bigcap_{i\in J}(I-A_i)\in F$$

しかし，ドモルガンの法則によって，

$$\bigcap_{i\in J}(I-A_i)=I-\bigcup_{i\in J}A_i$$

であるから $\bigcup_{i\in J}A_i\notin F$ であり，したがって

$$\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)=0$$

を得る．□

3. 個体と上部構造

超準解析の応用は，**個体** (individual) の集合 S を与えることより始まる．代表的なものとしては位相空間の点の集合とか実数の集合とかいったものである．技術的には，S の元は集合でないとするのがよい；すなわち，もし $x\in S$ なら

ば $x \neq \phi$[†] で，x は元を含まない （x は集合でないので $t \in x$ は自動的に偽）．よって $x \in S$ については $t \subseteq x$[††] は常に偽で $\mathscr{P}(x)=\phi$．これより後，"S は個体の集合とする"，といった場合は常に S の元は集合でないものと考える．

さて，代表的な場合には，S の元として現在通常の数学での記述法では集合として定義されているようなものを含んでいる．例えば，実数が有理数のある集合と考えられるとか，$n+1$ という自然数が (von Neumann によるのだが) 集合 $\{0, 1, \cdots, n\}$ と同一視されることなどである．それでは S の元は集合でないとする我々の主張をどのように調和させるのであろうか？　いろいろな方法があるが，その一つを記すと：

本来の意味の個体 (urelement) で，それらについては集合でないことの外は何も仮定しないような十分大きな集合 $\mathscr{S}$ をとることができるものとしよう．そして S の元を 1 対 1 に $\mathscr{S}$ の中に埋め込み，S の元をその像と同一視するのである．

いずれにしても，数学的対象物の本来の "すがた" の問題というような——$\sqrt{2}$ が集合かどうかというような——はいつも数学の実際の取扱いにそぐわない．数学の内部では専らその対象の "内部構成" よりもそれらの抽象的関係に関心をよせているわけで，それは B. ラッセル[†††] の有名な "ことば"

> "数学とは，我々がそこで何について語っているか知らない[††††]ような学問である"

がよくいい当ている．

さて哲学はさておき数学に戻って，S を個体の集合とする．そこで一つの簡単な体系の中に，通常の数学的構成で S の元にかかわるものに必要なすべての

---

†[訳注]　Zermelo-Fraenkel の集合論 ZF 等では集合のみを対象としているので外延性公理 (axiom of extensionality) $\forall x(x \in a \equiv x \in b) \rightarrow a=b$ を仮定しているが，ここでは集合の元とはなり得るが集合ではない "個体" を考えているわけである．

††[訳注]　x が集合であることを $\mathrm{set}(x)$ と記せば，$t \subseteq x$ の意味は $\mathrm{set}(t) \wedge \mathrm{set}(x) \wedge \forall y(y \in t \rightarrow y \in x)$ の意味か．

†††[訳注]　B. Russell (1872-1970) $a=\{x \mid x \notin x\}$ を考えることによって生ずるパラドックスでも有名．

††††　原文は Mathematics is the subject in which we don't know what we are talking about. 我々の目的のためには "かまわない" といった方がより適切か．

集合(関係とか函数も含めて)がどのように実現できるか示してみよう.

まず，次のような階層を定義する：

$$S_0 = S$$
$$S_{i+1} = S_i \cup \mathscr{P}(S_i)$$

これより S_i は $i=0,1,2,\cdots$ に対して定義される．そこで

$$\hat{S} = \bigcup_{i \in N} S_i = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \cdots$$

と定義する．このようにした $\hat{S}$† は S を**個体**(individual)とする**上部構造**(superstructure)とよばれる．S の各元は $\hat{S}$ の個体，$\hat{S}-S$ の元は集合とよばれる．また，$\phi \subseteq S$ であるから $\phi \in S_1$ である．

定義　$A \subseteq \hat{S}$ とする．A は，すべての $x \in A$ に対して $x \in S$ または $x \subseteq A$ のとき $\hat{S}$ の中で**推移的**(transitive)(または誤解がないときは単に推移的)であるとよばれる．

A が $\hat{S}$ の中で推移的ということは，次の同値な形でも表現できる：

$$x \in A-S \text{ かつ } y \in x \text{ ならば } y \in A$$

それは，A が集合であれば，$x \subseteq A$ は単に $y \in x$ ならば $y \in A$ を意味するからである．

補題 1.　各 S_i は $\hat{S}$ の中で推移的である．

証明　帰納法によって証明する．S_0 は明らかに推移的である．S_i が推移的であるとして $x \in S_{i+1}-S$ とする．そのときは $x \in S_i - S$ または $x \in \mathscr{P}(S_i)$ である．最初の場合には帰納法の仮定より $x \subseteq S_i$ であり，第二の場合にも巾集合の定義より $x \subseteq S_i$ である．しかし $S_i \subseteq S_{i+1}$ であるから $x \subseteq S_{i+1}$．このことは S_{i+1} が推移的であることを示している．□

補題 2.　$x \in y$ かつ $y \in S_i - S$ ならば $x \in S_{i-1}$ である．

証明　$y \notin S$ であるから $i>0$ である．S_i の定義より $y \in S_{i-1}$ または $y \subseteq S_{i-1}$ である．最初の場合には補題 1 を用いるとやはり $y \subseteq S_{i-1}$．だから x は y の元であることより $x \in S_{i-1}$ である．□

補題 3.　$x \in S_i - S$ ならば $\mathscr{P}(x) \in S_{i+2}$†† である．

---

† $\hat{S}$ なる記法および superstructure なる語は Robinson and Zakon [6] による．ここでの記号 ^ の用法は Machover-Hirschfeld [12] とは全く無関係である．

††[訳注]　$x \in S_i - S$ ならば $\mathscr{P}(x) \in S_{i+1}$ でもある．補題 2 の証明によれば $x \subseteq S_{i-1}$ である．

証明　補題 1 によって $x \subseteq S_i$．だから任意の x の部分集合は S_i の部分集合である，すなわち $\mathscr{P}(x) \subseteq \mathscr{P}(S_i) \subseteq S_{i+1}$．よって $\mathscr{P}(x) \in S_{i+2}$ である．

補題 4.　$\hat{S}$ は $\hat{S}$ の中で推移的である．

証明　$x \in \hat{S}-S$ とすると，ある i について $x \in S_i - S$ である．これより補題 1 を用いれば明らか．

補題 5.　$x \in \hat{S}-S$ ならば $\mathscr{P}(x) \in \hat{S}$ である．

証明　補題 3 より明らか．□

補題 6.　$y \subseteq x$ かつ $x \in \hat{S}-S$ ならば $y \in \hat{S}$ である．

証明　補題 4 および 5 より明らか．□

補題 7.　$x \in S_i - S$ かつ $x \cap S = \phi$（すなわち x は集合の集合）とする．$y = \bigcup_{z \in x} z$ とおくと $y \in S_i$ である．

証明　$t \in y$ とすると，ある $z \in x$ に対して $t \in z$ が成立する．補題 2 によって $z \in S_{i-1}$．帰納法の仮定より $z \in S_{i-1} - S$ であり，補題 1 によって $t \in S_{i-1}$．これは $y \subseteq S_{i-1}$ を示している．よって $y \in S_i$．

補題 8.　$x \in \hat{S}-S$ で $x \cap S = \phi$ とする．$y = \bigcup_{z \in x} z$ とおくと $y \in \hat{S}$ である．

証明　補題 7 より明らか．□

補題 9.　$S_i \in S_{i+1}$ であり，各 S_i について $S_i \in \hat{S}$ である．

証明　$S_i \subseteq S_i$，したがって $S_i \in \mathscr{P}(S_i)$．□

補題 10.　$a_1, \cdots, a_k \in S_i$ ならば $\{a_1, \cdots, a_k\} \in S_{i+1}$ である．

証明　$\{a_1, \cdots, a_k\}$ は S_i の部分集合である．だから S_{i+1} の元である．□

補題 11.　$a_1, \cdots, a_k \in \hat{S}$ ならば $\{a_1, \cdots, a_k\} \in \hat{S}$ である．

証明　$a_i \in S_{j_i}$，$i=1, 2, \cdots, k$ とする．$N = \max(j_1, \cdots, j_k)$ とおくと，各々について $a_i \in S_N$ であり補題 10 より所要の結果を得る．□

補題 12.　$x_1, \cdots, x_k \in \hat{S}-S$ とすれば $x_1 \cup \cdots \cup x_k \in \hat{S}$ である．

証明　$x_i \in S_N$ が $i=1, 2, \cdots, k$ について成立すれば，補題 1 によって $x_i \subseteq S_N$ であり $x_1 \cup \cdots \cup x_k \subseteq S_N$ である．□

補題 13.　$x, y \in S_i$ ならば $\langle x, y \rangle \in S_{i+2}$ である．

証明　補題 10 により $\{x\}, \{x, y\} \in S_{i+1}$ よって

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq S_{i+1}$$

したがって $\langle x, y \rangle \in S_{i+2}$．□

補題 14.　$x_1, \cdots, x_n \in S_i$，$n \geq 2$ ならば $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in S_{i+2n-2}$ である．

証明　補題 13 を用いて帰納法により明らか．□

定理 3.1　$X, Y \in \hat{S}-S$ ならば $X \times Y \in \hat{S}$ である．少し詳しく記すと $X, Y \in S_i - S$ であれば $X \times Y \in S_{i+3}$ であり $X^n \in \hat{S}$ がすべての $n \in N^+$ について成立する．

証明　$X, Y \in S_i - S$ とすれば，補題 1 と 13 を用いて

$$\langle x, y\rangle \in X \times Y \text{ ならば } x \in X \text{ かつ } y \in Y$$

である．したがって順次 $x, y \in S_i$, $\langle x, y\rangle \in S_{i+2}$ を得る．だから $X \times Y \subseteq S_{i+2}$. よって $X \times Y \in S_{i+3}$. 同様に $X^n \subseteq S_{i+2n-2}$ であるから $X^n \in S_{i+2n-1}$ を得る．□

定理 3.2　$X, Y \in \hat{S}-S$ であり，f が X から Y への写像とするとき，

（1）　$f \in \hat{S}$

（2）　$a \in X$ ならば $f(a) \in \hat{S}$

（3）　$A \subseteq X$ ならば $f[A] \in \hat{S}$.

証明（1）　$X, Y \in S_i - S$ とすると，定理3.1 の証明と同様に $X \times Y \subseteq S_{i+2}$. $f \subseteq X \times Y$ であるから $f \subseteq S_{i+2}$ であり $f \in S_{i+3}$ である．

（2）　S_i は推移的で，$f(a) \in Y$ であるから $f(a) \in S_i$ である．

（3）　$f[A] \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq S_i$ であるから $f[A] \subseteq S_i$ であり $f[A] \in S_{i+1}$ である．□

定理 3.3　$J, V \in \hat{S} \dot{-} S$ とし，各々の $j \in J$ に対して $X_j \in V$ とするとき，

（1）　$\bigcup_{j \in J} X_j \in \hat{S}$

（2）　$\prod_{j \in J} X_j \in \hat{S}$

証明（1）　$J, V \in S_i$ とする．すべての $j \in J$ について $X_j \in V$ であり，S_i が推移的であるから $X_j \in S_i$, だから $X_i \subseteq S_i$ である．したがって $\bigcup_{j \in J} X_j \subseteq S_i$ すなわち $\bigcup_{j \in J} X_j \in S_{i+1}$ である．

（2）　$f \in \prod_{j \in J} X_j$ とする．すべての $j \in J$ について $f(j) \in X_j$ である．(1)と同様に $f(j) \in S_i$ である．また，$J \subseteq S_i$ かつ $f \subseteq S_i \times S_i$ であるから $f \in \mathscr{P}(S_i \times S_i)$ である．すなわち

$$\prod_{j \in J} X_i \subseteq \mathscr{P}(S_i \times S_i)$$

したがって

$$\prod_{j\in J} X_j \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(S_i \times S_i))$$

$S_i \in \hat{S} - S$ だから補題 5 と定理 3.1 を用いて所要の結果を得る. □

$r, s \in \hat{S}$ とする. もし唯一の $t \in \hat{S}$ に対して

$$\langle s, t\rangle \in r$$

が成立しているとき $r \restriction s = t$ と記する. そうでない場合 (すなわち, 存在しないとか, 二つ以上存在するとき) $r \restriction s = \phi$ とおく. この演算 $\restriction$ は次のような性質をもち大切なものである：

（1） r が函数であり $s \in \mathrm{dom}(r)$ ならば $r \restriction s = r(s)$ である.

（2） すべての $r, s \in \hat{S}$ に対して $r \restriction s \in \hat{S}$ である.

4. 域†

S を個体の集合とする.

定義 $\hat{S}$ の部分集合 U は下記の性質を有するとき, S を個体としてもつ**域** (universe with individuals S) とよばれる.

（1） $\phi \in U$

（2） $S \subseteq U$

（3） $x, y \in U$ ならば $\{x, y\} \in U$ である

（4） U は $\hat{S}$ の中で推移的である.

次のものは, 前節から明らかな結果である.

系 4.1 $\hat{S}$ には S を個体としてもつ域である.

域は次のような算法で閉じているという性質をもつことに注意してほしい：

定理 4.2 $r, s \in U$ ならば $\langle r, s\rangle \in U$ かつ $r \restriction s \in U$ である.

証明 定義より $\{r, s\}$ と $\{r\} = \{r, r\}$ は U の元である. だから $\langle r, s\rangle = \{\{r\}, \{r, s\}\}$ も U の元である. もし $r \restriction s = \phi$ であれば明らかに $r \restriction s \in U$ である. そうでないときは $r \restriction s$ は $\langle s, t\rangle \in r$ を満足する一意的 t である. U が推移的であるから $\langle s, t\rangle \in U$ であり, 推移性をさらに二度用いて $\{s, t\} \in U$ および $t \in U$ を得る. □

上部構造 $\hat{S}$ は S を個体にもつ**標準域** (standard universe with individuals

---

†[訳注] universe この場合“宇宙”は少し大げさすぎるし, 全体領域も少し違う感じがしたので一応このように訳してみた.

S)または単に標準域(standard universe)とよばれる．我々は次に**超準域**(nonstandard universe)とよばれている，$\hat{S}$と非常に深く関係した性質を有し，個体としてはSの元を"含んで"いる他の域をどのように構成してゆくか示す．

このために，Iを空でない添字集合(後にIを特定することにして)，FをI上の極大フィルター，そしてμをそのFによって決定された測度とする．我々は，与えられた性質を満足するIの元の全体が測度1(その性質を満足しないものの全体が測度0といっても同値であるが)のとき，その性質が**ほとんど到るところ**(almost everywhere)またはほとんどすべてのδについて成立するといいa.e.と略記する．

我々の構成では，Iで定義され$\hat{S}$の中に値を有する函数fを用いる．そのようなfに対し，各$\delta \in I$について$f_\delta = f(\delta)$と記す．各$n \in N$に対しZ_nでIから$\hat{S}$への函数fで$f_\delta \in S_n$ a.e.となるものの全体を記し，$Z = \bigcup_{n \in N} Z_n$とおく．

$\hat{S}$をZの中に埋め込む自然な写像がある．すなわち元$r \in \hat{S}$を次のような"定数"函数と同一視(identify)する：

$$\delta \in I \text{ に対し } r_\delta = r.$$

また，$f, g \in Z_0$に対して$f \sim g$とは$f_\delta = g_\delta$ a.e.のこととする．

補題 1． 関係$\sim$はZ_0上の同値関係である．

証明　$f \sim f$とか，$f \sim g$ならば$g \sim f$については明らかである．$f \sim g$かつ$g \sim h$と仮定する．このとき等式

$$f_\delta = g_\delta \qquad g_\delta = h_\delta \tag{$*$}$$

はほとんど到るところ成立する．さて，等式

$$f_\delta = h_\delta$$

は($*$)の両式が成立するときは成立する．だがこれらが成立しないのは($*$)のいずれか一方の式が成立しない場合に含まれるが，それは二つの測度0の集合の和に含まれ，定理2.6によって，$f_\delta = h_\delta$ a.e.である．すなわち$f \sim h$を得る．□

定理2.6は補題1の証明において，ほとんど到るところ成立する二つの条件から，ほとんど到るところで二つの条件が同時に成立することを結論するために用いられた．定理2.6はこのような要領でくり返し用いられる．(もちろん，同じ証明によって$f_\delta = g_\delta$ a.e.という性質がZ上の同値関係を定めることが示

されるが，ここでは Z_0 についてのみが必要であった）

各 $f \in Z_0$ に対して

$$\bar{f} = \{g \in Z_0 \mid g \sim f\}$$

と記す．その結果 Z_0 は $\bar{f}$ の形の $\sim$ による同値類の互いに共通部分のない和に分解できる．そこで

$$W = \{\bar{f} \mid f \in Z_0\}$$

とする．$x, y \in S$（Z_0 の中への埋め込みによって）について $x \neq y$ ならば $\bar{x} \neq \bar{y}$ であることは明らかである．これより各 $x \in S$ をそれに応ずる元 $\bar{x} \in W$ と同一視することができる．すなわち，今は $S \subseteq W$ と書いて，$x \in S$ に対して $\bar{x} = x$ を得たといってもよいであろう．

我々は W の元を個体とする $\tilde{W}$ なる超準域（$\hat{S}$ に対応する）とよばれる域を定義することにしよう．これには $\hat{W}$ を構成することも含まれる．それはもちろん $W_0 = W$，$W_{i+1} = W_i \cup \mathscr{P}(W_i)$ および $\hat{W} = \bigcup_{i \in N} W_i$ である．$\tilde{W}$ は W の元ならびに後で指定される $\hat{W}$ の元より成っている．

いくらかの読者諸氏は，頂度今見てきたように，W の元は "本来は" 同値類でありながら，上部構造 $\tilde{W}$ に関係しては**非集合**（nonset）であるということに，煩わされているかも知れない．このような場合はここより先に進まれる前に，今一度第 3 節の最初の部分を読み直して頂くことをお勧めする．

超準域 $\tilde{W}$ の定義を完成させるためには，$\hat{W}$ の元のどれが $\tilde{W}$ に属するかを指定しなければならない．実際には $f \in Z_n$ に $\bar{f} \in W_n$ を対応させ，このような $\bar{f}$ が $\tilde{W}$ を構成するようにするのである．

$f \in Z_0$ に対しては $\bar{f}$ はすでに導入された通りで，$\bar{f} \in W = W_0$ である．$i \geq 0$ として $f \in Z_i$ に対して $\bar{f}$ がすでに $\bar{f} \in W_i$ を定めるように定義されているものと仮定する．このとき $f \in Z_{i+1} - Z_i$ に対して，次のように

$$\bar{f} \text{ を } g \in Z_i \text{ で } g_\delta \in f_\delta \text{ a.e. となる } \bar{g} \text{ の全体}$$

と定める．このようにすると，仮定より $\bar{g} \in \bar{f}$ ならば $\bar{g} \in W_i$ だから $\bar{f} \subseteq W_i$ であり $\bar{f} \in W_{i+1}$ である．このような帰納法による定義によって，すべての $f \in Z$ に対して $\bar{f}$ を定めることができる．そこで

$$\tilde{W} = \{\bar{f} \mid f \in Z\}$$

とおき，$\tilde{W}$ を $\hat{S}$ に応ずる**超準域**（nonstandard universe）とよぶ（もちろん，$\tilde{W}$ は添字集合 I およびその上の極大フィルターにも関係している）．$\tilde{W}$ は実際

に域になっていることがわかるであろう．

我々の埋込み写像によると，$\hat{S}\subseteq Z$ であるから各 $r\in\hat{S}$ に対してそれに応ずる $\bar{r}\in\tilde{W}$ がある．$r\in\hat{S}$ に応ずる $\bar{r}$ を $\tilde{W}$ の**標準元** (standard element), そうでない元(もし存在すれば)は**超準元** (nonstandard element) とよばれる．特に S の元は**標準個体** (standard individual), $W-S$ の元は**超準個体** (nonstandard individual) とよばれる．

補題 2.　$f,g\in Z$ については $\bar{g}\in\bar{f}$ が成立するのは $g_\delta\in f_\delta$ a.e. が成立するときかつこのときに限る．

証明　$\bar{g}\in\bar{f}$ とすると定義によって $g_\delta\in f_\delta$ a.e. である．逆に $f\in Z_n$ かつ $g_\delta\in f_\delta$ a.e. とする．f_δ は集合だから $f_\delta\in S_0=S$ a.e. が成立することは不可能である．だから $n>0$ であり $f_\delta\in S_n-S$ a.e. である．第3節の補題2および定理2.6によって $g_\delta\in S_{n-1}$ a.e. であり，したがって $g\in Z_{n-1}$ だから $\bar{g}\in\bar{f}$ が成立する．□

補題 3.　$f_\delta=g_\delta$ a.e. であり $f\in Z_n$ ならば $g\in Z_n$ である．

証明　定理2.6によって $f_\delta\in S_n$ a.e. かつ $f_\delta=g_\delta$ a.e. から $g_\delta\in S_n$ a.e. が導かれる．

補題 4.　$f,g\in Z$ かつ $f_\delta=g_\delta$ a.e. ならば $\bar{f}=\bar{g}$ である．

証明　補題3を用いて，$f,g\in Z_n$ とする．$n=0$ ならば定義より明らかである．そこで $n>0$ かつ $f,g\in Z_n-Z_0$ と仮定する．$f_\delta=g_\delta$ a.e. であることと，定理2.6を用いると，すべての $k\in Z$ に対して

$$k_\delta\in f_\delta \text{ a.e.} \quad と \quad k_\delta\in g_\delta \text{ a.e.}$$

は同値である．補題2によって

$$\bar{k}\in\bar{f} \quad と \quad k_\delta\in f_\delta \text{ a.e.}$$

$$\bar{k}\in\bar{g} \quad と \quad k_\delta\in g_\delta \text{ a.e.}$$

は同値であるから，$\bar{k}\in\bar{f}$ と $\bar{k}\in\bar{g}$ は同値であり，したがって $\bar{f}=\bar{g}$ を得る．□

補題 5.　$f,g\in Z$ かつ $\bar{f}\subseteq\bar{g}$ ならば $f_\delta\subseteq g_\delta$ a.e. である．

証明　$\bar{f},\bar{g}$ は集合であるから $f,g\notin Z_0$ である．そこで

$$A=\{\delta\in I\,|\,f_\delta\subseteq g_\delta\}$$

とおく．証明したいことは $\mu(A)=1$ である．そこでそうでない，すなわち $\mu(A)=0$ とする．そして函数 k を次のように定める．

$\delta\in A$ に対しては $k_\delta=\phi$, $\delta\in I-A$ に対しては $k_\delta\in f_\delta$, $k_\delta\notin g_\delta$ となるようにとる．ある n に対し $f_\delta\in S_n$ a.e. が成立するので，3節の補題2と定理2.6を用

いて $k_\delta \in S_{n-1}$ a.e. である．よって補題 2 を用いると $\bar{k} \in \bar{f}$．仮定より $\bar{k} \in \bar{g}$，すなわち $k_\delta \in g_\delta$ a.e. を得る．しかし $\delta \in I-A$ に対しては $k_\delta \notin g_\delta$ であり $\mu(I-A)=1$ なる仮定に反する．すなわち $\mu(A)=1$ であることが示された．□

補題 2, 4, 5 を合せて次の結果を得る．

定理 4.3 $f, g \in Z$ に対して次の性質を得る．

（1） $\bar{f} \in \bar{g}$ と $f_\delta \in g_\delta$ a.e. は同値

（2） $\bar{f} = \bar{g}$ と $f_\delta = g_\delta$ a.e. は同値

証明 (2)について $\bar{f}=\bar{g}$ から $f_\delta = g_\delta$ a.e. を示せば十分である．$\bar{f}=\bar{g}$ とすると $\bar{f} \subseteq \bar{g}$ および $\bar{g} \subseteq \bar{f}$ である．補題 5 によって $f_\delta \subseteq g_\delta$ a.e. および $g_\delta \subseteq f_\delta$ a.e. である．定理 2.6 より $f_\delta = g_\delta$ a.e. を得る．□

補題 6. $f, g \in Z$ かつすべての $\delta \in I$ について $k_\delta = \{f_\delta, g_\delta\}$ であれば $k \in Z$ かつ $\bar{k} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ である．

証明 $f_\delta \in S_n$ a.e., $g_\delta \in S_n$ a.e. とする．これより定理 2.6 と 3 節補題 10 によって $k_\delta \in S_{n+1}$ a.e. である．すなわち $k \in Z$ を得る．

すべての $\delta \in I$ に対して $f_\delta \in k_\delta$ かつ $g_\delta \in k_\delta$ であるから，$\bar{f}, \bar{g} \in \bar{k}$ を得る．$\bar{h}$ を $\bar{k}$ の任意の元とすると，$h_\delta \in k_\delta$ a.e. である．$h_\delta \in k_\delta$ ならば $h_\delta = f_\delta$ または $h_\delta = g_\delta$ であるから，$k_\delta = f_\delta$ a.e. または $h_\delta = g_\delta$ a.e. を得る．すなわち $\bar{h} = \bar{f}$ または $\bar{h} = \bar{g}$，これは $\bar{k} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ を意味している．□

補題 7. $\tilde{W}$ は $\hat{W}$ で推移的である．

証明 $\bar{f} \in \tilde{W}$ かつ $\bar{f} \notin W$ とする．このとき $\bar{f}$ の定義よりそれは $\tilde{W}$ の元 $\bar{g}$ より成っている．すなわち $\bar{f} \subseteq \tilde{W}$ である．

定理 4.4 $\tilde{W}$ は W を個体とする域である．

証明 定義にしたがえば，この結果はほとんど補題 6 と 7 に含まれている．残るところは $\phi \in \tilde{W}$ である．$\phi \in S_1 \subseteq Z_1$ であるから

$$\bar{\phi} = \{\bar{g} \mid g_\delta \in \phi \ \text{a.e.}\} = \phi$$

によって $\phi \in \tilde{W}$ を得る．□

補題 8. $f, g, h \in Z$ に対して

$$\bar{h} = \{\bar{f}, \bar{g}\} \ \text{と} \ h_\delta = \{f_\delta, g_\delta\} \ \text{a.e. は同値である．}$$

証明 すべての $\delta \in I$ について $h_\delta = \{f_\delta, g_\delta\}$ とすると補題 6 より $\bar{k} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ である．だから定理 4.3 によって $\bar{h} = \{\bar{f}, \bar{g}\}$ と $h_\delta = k_\delta$ a.e. は同値である．これが求める性質である．□

補題 9. $f, g, h \in Z$ に対して

$$\bar{h}=\langle\bar{f},\bar{g}\rangle \text{ と } h_\delta=\langle f_\delta, g_\delta\rangle \text{ a.e. は同値である.}$$

証明 すべての $\delta\in I$ について $u_\delta=\{f_\delta\}$, $v_\delta=\{f_\delta, g_\delta\}$, $k_\delta=\{u_\delta, v_\delta\}$ とする．このようにすると $k_\delta=\langle f_\delta, g_\delta\rangle$ である．補題 6 によって $\bar{u}=\{\bar{f}\}$, $\bar{v}=\{\bar{f},\bar{g}\}$, $\bar{k}=\{\bar{u},\bar{v}\}=\langle\bar{f},\bar{g}\rangle$ である．すなわち定理4.3によって $\bar{h}=\langle\bar{f},\bar{g}\rangle$ と $h_\delta=k_\delta$ a.e. は同値であり所要の結果を得る．□

補題 10. $f, g\in Z$ とし，すべての $\delta\in I$ について $k_\delta=f_\delta\upharpoonright g_\delta$ とすれば，$k\in Z$ であり $\bar{k}=\bar{f}\upharpoonright\bar{g}$ である．

証明 $f_\delta\in S_n$ a.e. とする．各 $\delta\in I$ について次のうち唯一つが成立する：

(1) k_δ は $\langle g_\delta, m\rangle\in f_\delta$ となる唯一つの m である．

(2) $k_0=\phi$ であり $\langle g_\delta, l\rangle\in f_\delta$, $\langle g_\delta, m\rangle\in f_\delta$ かつ $l\neq m$ なる元 l, m が存在する．

(3) $k_\delta=\phi$ であり $\langle g_\delta, m\rangle\in f_\delta$ となる m は存在しない．

さて，(1), (2), (3)の内一つは a.e.（すなわち，ほとんど到るところ）で成立する．(だから $k\in Z$)，よって三つの場合がある．

場合 1

ほとんど到るところ(1)が成立する：このときは $\langle g_\delta, k_\delta\rangle\in f_\delta$ a.e. であり，補題 9 より $\langle\bar{g},\bar{k}\rangle\in\bar{f}$．そこで $\langle\bar{g},\bar{h}\rangle\in\bar{f}$ とすると，補題 9 を再び用いると $\langle g_\delta, h_\delta\rangle\in f_\delta$ a.e. である．だからこの条件と(1)が同時にほとんど到るところ成立する：すなわち $h_\delta=k_\delta$ a.e. であり $\bar{h}=\bar{k}$ である．これは $\bar{k}=\bar{f}\upharpoonright\bar{g}$ を示している．

場合 2

ほとんど到るところ(2)が成立する：このときは測度 1 の $\delta\in I$ について，t_δ, u_δ を $t_\delta\neq u_\delta$, $\langle g_\delta, t_\delta\rangle\in f_\delta$, $\langle g_\delta, u_\delta\rangle\in f_\delta$ が成立するように定義することができる．(2)が成立しないような測度 0 の $\delta\in I$ に対しては $t_\delta=u_\delta=\phi$ とする．

これより $t_\delta, u_\delta\in S_n$ a.e. であり $t, u\in Z$ である．補題 9 によって $\langle\bar{g},\bar{t}\rangle\in\bar{f}$, $\langle\bar{g},\bar{u}\rangle\in\bar{f}$ であり，定理4.3によって $\bar{t}\neq\bar{u}$ を得る．よって $\bar{f}\upharpoonright\bar{g}=\phi$．しかし $k_\delta=\phi$ a.e. であるから $\bar{k}=\phi$ である．

場合 3

ほとんど到るところ(3)が成立する：ある $h\in Z$ に対して $\langle\bar{g},\bar{h}\rangle\in\bar{f}$ が成立すると仮定する．これより $\langle g_\delta, h_\delta\rangle\in f_\delta$ a.e. であるが，(3)がほとんど到るところ成立するという仮定に反する．すなわち $\bar{f}\upharpoonright\bar{g}=\phi=\bar{k}$ を得る．□

補題 11. $f, g, h\in Z$ に対して

$$\bar{h}=\bar{f}\upharpoonright\bar{g} \text{ と } h_\delta=f_\delta\upharpoonright g_\delta \text{ は同値である.}$$

証明　すべての $\delta\in I$ に対して $k_\delta=f_\delta\upharpoonright g_\delta$ とおくと，補題 10 によって，$\bar{k}=\bar{f}\upharpoonright\bar{g}$ である．ここで定理 4.3 を用いて所要の結果を得る．□

補題 9 と 11 を合せて

定理 4.5　$f, g, h\in Z$ に対して

（1）　$\bar{h}=\langle\bar{f}, \bar{g}\rangle$ と $h_\delta=\langle f_\delta, g_\delta\rangle$ a.e. は同値

（2）　$\bar{h}=\bar{f}\upharpoonright\bar{g}$ と $h_\delta=f_\delta\upharpoonright g_\delta$ a.e. は同値

定理 4.5 は重要なウォシュ (J. Łos) の定理の特別の場合であるが，証明にはこれが用いられるのである．

5. 言　　語

各域 U に応じて，それに関係した色々の言明を与えるために，それに対応した**言語** (language) $\mathscr{L}_U$ (または単に $\mathscr{L}$) を構成する．もちろん，これらの言語はそれ自身数学的対象としてはっきりと定義されたものである．

言語 $\mathscr{L}$ は，$\mathscr{L}$ の**アルファベット** (alphabet) とよばれる集合 $\mathscr{A}$ の上に構成されており，$\mathscr{A}$ の元は**記号** (symbol) とよばれる．(読者諸氏は "記号" ということばのここでの用法から哲学的な結論を導かないようにしてほしい．ここでの用法は，その対象の素性についての言明ではなくて，例えば，"空間"の中の "点"といったものである)．そして $\mathscr{A}$ の元は他の $\mathscr{A}$ の元の有限列ではないものとする．その他の点では，$\mathscr{A}$ はどんな対象からなっていてもよいとする．

$\mathscr{A}$ を書いて

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2\cup\mathscr{A}_3$$

とする．ここに $\mathscr{A}_1$ と $\mathscr{A}_2$ は与えられた域 U に無関係の部分である．$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ および $\mathscr{A}_3$ は互いに素とする．我々の用いる記号の記法はそれによって表現したい "意味" を示すように意図されてはいる．しかし，我々の構成法の形式的抽象的であることを強調するため，記号には太字を用いておく．

（1）　$\mathscr{A}_1$ に属する記号は

$$\mathbf{=}\quad\mathbf{\in}\quad\mathbf{\neg}\quad\mathbf{\&}\quad\mathbf{\exists}\quad\mathbf{(}\quad\mathbf{)}\quad\mathbf{\langle}\quad\mathbf{\rangle}\quad\mathbf{\upharpoonright}\quad\mathbf{,}$$

（2）　$\mathscr{A}_2$ に属する記号は**変数** (variable) とよばれ，可算個の元より成る：

$$\mathbf{x}_1\quad\mathbf{x}_2\quad\mathbf{x}_3\quad\cdots$$

（3）　$\mathscr{A}_3$ は U と 1 対 1 に対応している集合で，各 $b\in U$ に対して，それに

対応する b の**名**(name)とよばれる $\mathscr{A}_3$ の $\boldsymbol{b}$ と記される元がある．$\mathscr{A}_3$ の記号は $\mathscr{L}$ の**定数**(constant)とよばれる．もちろん，$\mathscr{A}_3$ は一般的には無限で場合によっては非可算ということもある．

$\mathscr{L}$ のアルファベットの有限列は $\mathscr{L}$ の**表現**(expression)とよばれる．例えば

$$\&=\in$$

は(長さ 3[†])の表現である．

表現 μ はつぎのようなとき，($\mathscr{L}$ の)**項**(term)とよばれる．すなわち $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n=\mu$ となる表現の有限列があって，各 i $(1\leq i\leq n)$ について次のいずれかが成立するときである：

(1) μ_i は変数

(2) μ_i は定数

(3) $\mu_i=\langle\mu_j, \mu_k\rangle$ ここに $j, k<i$

(4) $\mu_i=(\mu_j \upharpoonright \mu_k)$ ここに $j, k<i$

表現

$$(\mathbf{x}_1 \upharpoonright \mathbf{x}_2) \quad \text{および} \quad \langle(\mathbf{x}_3 \upharpoonright \mathbf{x}_2),\ \mathbf{x}_3\rangle$$

等は項の例である．

(3)，(4)の中において，我々は "$=$" を用い "$=$" は用いなかったことに注意しよう．例えば(4)は次のことの略記である：μ_i は "(" の後に表現 μ_j があり，その後に "$\upharpoonright$"，さらに表現 μ_k があり，その後に ")" となる記号列である．項のうち変数を含まないものを**閉項**(closed term)とよぶ．

表現 α は次のようなとき，($\mathscr{L}$ の)**論理式**(formula)とよばれる．すなわち，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n=\alpha$ なる表現の有限列があって，各 i $(1\leq i\leq n)$ について次のいずれかが成立するときである：

(1) $\alpha_i=(\mu=\nu)$ ここに μ, ν は $\mathscr{L}$ の項

(2) $\alpha_i=(\mu\in\nu)$ ここに μ, ν は $\mathscr{L}$ の項

(3) $\alpha_i=\neg\alpha_j$ ここに $j<i$

(4) $\alpha_i=(\alpha_j\&\alpha_k)$ ここに $j, k<i$

(5) $\alpha_i=(\exists\mathbf{x}_j\in\mu)\alpha_k$ ここに [††]$k<i$ で μ は $\mathscr{L}$ の項で $\mathbf{x}_j$ を含まない．

例えば，次のものは論理式の例である．

$$((\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2\&\neg(\mathbf{x}_1\in\mathbf{x}_2))$$

---

†[訳注] 原著では &＝ であって長さ 3 とある．

†† 通常，μ は定数または変数である．

$(\exists \mathbf{x}_i \in \mu)$ の形の表現は**特称束縛記号**†(existential quantifier) とよばれる.

与えられた記号が一つの表現の中に二度以上表われる (occur) こともある. 例えば, 変数 $\mathbf{x}_1$ は論理式

$$((\mathbf{x}_1 \in \mathbf{x}_2) \& (\exists \mathbf{x}_1 \in b)(\mathbf{x}_1 \in x_2))$$

の中では, 3, 10, 15 番目の記号として表われている.

これらの $\mathbf{x}_1$ の表われ方の最初のものは**自由** (free) であり, 他のものは**束縛** (bound) されているという. これは次のような意味である：

論理式 α の中における変数 $\mathbf{x}_i$ の表われ方は, $\mathbf{x}_i$ が α の一部である $(\exists \mathbf{x}_i \in \mu)\gamma$ の形の論理式 β の中に表われるとき, **束縛** (bound) されているという. α の中で束縛されていないとき**自由** (free) というのである.

自由に表われる変数がないような ($\mathscr{L}$ の) 論理式は, **文章** (sentence) とよばれる.

例えば, 論理式

$$(\exists \mathbf{x}_1 \in \mathbf{b}) \neg (\exists \mathbf{x}_2 \in \mathbf{c})(\mathbf{x}_1 \in \mathbf{x}_2)$$

の中では, すべての変数は束縛されているので一つの文章である.

μ を $\mathscr{L}$ の項とするとき, μ の中の変数はすべて $\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{in}$ の中に含まれる (残りがあるかも知れない) とき

$$\mu = \mu(\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{in})$$

と記する. そして μ の中の $\mathbf{x}_{i_1}$ には $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{x}_{i_2}$ には $\mathbf{b}_2$ 等を代入して得られた閉項 (closed term) を

$$\mu(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n)$$

と記する. 論理式 α に対しても, α に自由に表われる変数は $\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{in}$ に含まれるとき,

$$\alpha = \alpha(\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{in})$$

と記する. そして α の中の x_{i_1} には $\mathbf{b}_1$, x_{i_2} には $\mathbf{b}_2$ 等を代入して得られた文章 (sentence) を

$$\alpha(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n)$$

と記する.

---

†[訳注]　単に存在記号ともよぶ.

6. 意味論

$\mathscr{L}_U$ の一つの閉項は U の特定の元を，そして一つの文章は U に関する，真または偽の，一つの主張を〝表現〟していると考えられる．これらの概念を明確にするためいわゆる**意味論**(semantics)について記述しておく．

μ を $\mathscr{L}_U$ の閉項とするとき，その値 $|\mu|_U$ (または単に $|\mu|$) を次のように定める．

(1) $b \in U$ については $|\mathbf{b}|_U = b$

(2) $|\langle \mu, \nu \rangle|_U = \langle |\mu|_U, |\nu|_U \rangle$

(3) $|(\mu \upharpoonright \nu)|_U = (|\mu|_U \upharpoonright |\nu|_U)$

これらによって $|\mu|_U$ は μ の長さによる帰納法によって定義され，$|\mu|_U \in U$ なることも(帰納法によって)定理4.1より証明される．

次に $\mathscr{L}_U$ の文章について $U \models \alpha$ (α は U で**正しい**(true in U)と読む)となる概念を帰納的に定める．

(1) $U \models (\mu = \nu)$ は $|\mu|_U = |\nu|_U$ のこと，

(2) $U \models (\mu \in \nu)$ は $|\mu|_U \in |\nu|_U$ のこと，

(3) $U \models \neg\alpha$ は $U \models \alpha$ でないこと，

(4) $U \models (\alpha \& \beta)$ は $U \models \alpha$ かつ $U \models \beta$ のこと，

(5) $U \models (\exists \mathbf{x}_i \in \mu)\alpha(\mathbf{x}_i)$ はある $c \in |\mu|_U$ に対して $U \models \alpha(\mathbf{c})$ のこと．

この定義は文章の中に表われる記号 $\neg, \&, \exists$ の数に関する帰納法である．(1)と(2)はこの数が0の場合の $U \models \alpha$ の定義であり，(3)，(4)と(5)はこの数が >0 の場合の $U \models \alpha$ の正しさを，数のより少ない場合の $U \models \beta$ の正しさの一つまたは何個かの正しさに帰着させている．

取扱っているものを文章に限ったことから，(1)と(2)の場合は μ，ν．そして(5)の場合の μ が閉項となり，したがって $|\mu|_U$，$|\nu|_U$ が定義されていたことを注意しておこう．

読者のうち，このような〝正しさ〟の定義に初めて出合った方は，何か循環しているのではないかという感じを受けられるかも知れない．そして，実際，この定義は複雑な文章 α については $U \models \alpha$ であるかどうかを決定するにはあまり助けにならない．(ある文章 α を作って，$\hat{S} \models \alpha$ がリーマンの予想†とかそ

---

†[訳注] G.F.Riemann(1826-1866)の問題 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \prod_p \frac{1}{1-n^{-s}}$ の自明で (→)

の他の古典的数学の問題と同値になるようにすることは，少し実行してみればできるやさしいことである）

重要なことは，"正しさ"の直観的概念がその概念についての有用な定理を証明できるという方法で明確にされていることである.

さて $U\models\alpha$ が成立しないとき $U\not\models\alpha$ と記し，α は U で**偽**（false）であるという.

論理式は U に関したことについて述べるために用いられるだけではなくて，U の部分集合を定義するためにも用いられる.

定義　$A\subseteq U$ に対して，$\mathscr{L}_U$ の論理式 $\alpha(\mathbf{x}_i)$ があって

$$A=\{b\in U\mid U\models\alpha(\mathbf{b})\}$$

が成立するとき，A は U で**定義可能**（definable）（または U の定義可能な部分集合）とよぶ．そして，この論理式 α は $\mathscr{L}_U$ における A の**定義**（definition）という.

$\mathscr{L}_U$ では直接には与えられていない基本的な論理演算について，その略記法を与えておく．α,β を $\mathscr{L}_U$ の任意の論理式とするとき

$$(\alpha\vee\beta)=\neg(\neg\alpha\,\&\,\neg\beta),$$
$$(\alpha\rightarrow\beta)=\neg(\alpha\,\&\,\neg\beta),$$
$$(\alpha\leftrightarrow\beta)=((\alpha\rightarrow\beta)\,\&\,(\beta\rightarrow\alpha)),$$

さらに

$$(\forall\mathbf{x}_i\in\boldsymbol{\mu})\alpha=\neg(\exists\mathbf{x}_i\in\boldsymbol{\mu})\neg\alpha$$

と記する.

$\models$ の定義から直接の計算によって次の性質を得る：

$U\models(\alpha\vee\beta)$　は　$U\models\alpha$ または $U\models\beta$ と同値,

$U\models(\alpha\rightarrow\beta)$　は　$U\not\models\alpha$ または $U\models\beta$ と同値,

$U\models(\alpha\leftrightarrow\beta)$　は　$U\models\alpha$ かつ $U\models\beta$, または $U\not\models\alpha$ かつ $U\not\models\beta$ と同値,

$U\models(\forall\mathbf{x}_i\in\boldsymbol{\mu})\alpha(\mathbf{x}_i)$　はすべての $\boldsymbol{c}\in U$ に対して $U\models\alpha(\boldsymbol{c})$ と同値.

（→）ない 0 点の実部が $\frac{1}{2}$ であるという予想．D.Hilbert（1862-1943）の 23 の問題中 8 番目の素数分布に関した問題として有名で未解決である．0 点は実軸に近い方から $\frac{1}{2}\pm14,\cdots i,\frac{1}{2}\pm21,\cdots i,\frac{1}{2}\pm25,\cdots i$ 等である.

7.　ウォシュの定理

6節で，各Uに対して言語$\mathscr{L}_U$を構成してきた．しかしここで我々が関心をもっているのは丁度二つの域である．それは標準域$\hat{S}$と超準域$\tilde{W}$である．これより後

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\hat{S}} \quad \text{および} \quad {}^*\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\tilde{W}}$$

と記する．そしてμを$\mathscr{L}$の閉項とすると$|\mu|=|\mu|_{\mathscr{L}}$また，$\mu$を${}^*\mathscr{L}$の閉項とするとき$|\mu|_*=|\mu|_{*\mathscr{L}}$と記する．終りに，$\alpha$を$\mathscr{L}$の文章とすると$\hat{S}\models\alpha$のことを$\models\alpha$と記し，また$\alpha$を${}^*\mathscr{L}$の文章とするとき$\tilde{W}\models\alpha$のことを$*\models\alpha$と記する．

$\mathscr{L}$の表現力は非常に大きく，いずれ明らかになることであろうが，すべての古典的数学の命題は$\mathscr{L}$の中で表現可能なのである．

λを$\mathscr{L}$の項(または論理式)とするとき${}^*\lambda$で${}^*\mathscr{L}$の項(または論理式)でλの中のすべての$\mathbf{b}$をそれに応ずる$\bar{\mathbf{b}}$で置換えたものとする．[ここで各々の$b\in\hat{S}$に対して$\bar{b}\in\tilde{W}$が対応していることを用いている]もし，特にλの中のbは常に$b\in S$であれば，${}^*\lambda=\lambda$である[この場合λは同時に$\mathscr{L}$と${}^*\mathscr{L}$の項(または論理式)である]

非常に重要なことは我々の超準域$\tilde{W}$の構成によって，上で定義された写像を通じて$\mathscr{L}$と${}^*\mathscr{L}$の意味論が深く関係していることである．

定理 7.1　$\mu=\mu(\mathbf{x}_{i_1},\cdots,\mathbf{x}_{i_n})$，$n>0$を$\mathscr{L}$の項とし，$g^1,g^2,\cdots,g^n\in Z$，そして，

$$\bar{g}=|{}^*\mu(\bar{\mathbf{g}}^1,\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^n)|_*$$

とすると

$$g_\delta=|\mu(\mathbf{g}^1_\delta,\ \cdots,\mathbf{g}^n_\delta)|\ \text{a.e.}$$

である．

証明　証明はμの中に表われる"("と"〈"の数に関する帰納法による．

最初に$k=0$とするとμは変数か定数である．もしμが変数ならば

$$\mu=\mathbf{x}_{i_j} \qquad \text{ここに}\quad 1\leq j\leq n$$

なるjがある．だから$\bar{g}=|\bar{\mathbf{g}}^j|_*=\bar{g}^j$，定理4.3によって

$$g_\delta=g^j_\delta\ \text{a.e.}$$

しかし，各$\delta\in I$について

$$g^j_\delta=|\mu(\mathbf{g}^1_\delta,\ \cdots,\mathbf{g}^n_\delta)|$$

であり所要の結果を得る．もしμが定数であれば，例えば$\mu=\mathbf{b}$とすると，$b\in$

$\hat{S}$，だから $^*\mu=\bar{\boldsymbol{b}}$ であり

$$\bar{g}=|\bar{\mathbf{b}}|_*=\bar{b}$$

すなわち，定理 4.3 によって

$$g_\delta=b \text{ a.e.}$$

である．(もちろん $b\in\hat{S}$，すべての δ について $b_\delta=b$)．しかもすべての δ に対して

$$b=|\mathbf{b}|=|\mu(\mathbf{g}^1_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)|$$

であるから，これからも所要の結果を得る．

$k=0$ の場合は証明がすんだので，$k>0$ と仮定し，場合を二つに分ける．

場合 1

$\mu=\langle\nu, \eta\rangle$，ここに ν，η に表われる "(" と "⟨" の数は k より少ない項とする．そして

$$\bar{h}=|^*\nu(\bar{\mathbf{g}}^1, \bar{\mathbf{g}}^2, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*,$$
$$\bar{k}=|^*\eta(\bar{\mathbf{g}}^1, \bar{\mathbf{g}}^2, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*.$$

とおく．帰納法の仮定より

$$h_\delta=|\nu(\mathbf{g}^1_\delta, \mathbf{g}^2_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)| \text{ a.e.}$$
$$k_\delta=|\eta(\mathbf{g}^1_\delta, \mathbf{g}^2_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)| \text{ a.e.}$$

である．さて $|\mu|_*$ の定義より

$$\bar{g}=\langle\bar{h}, \bar{k}\rangle$$

であるから，定理 4.5 と $|\mu|$ の定義を用いて

$$\begin{aligned} g_\delta&=\langle h_\delta, k_\delta\rangle \text{ a.e.}\\ &=\langle|\nu(\mathbf{g}^1_\delta, \mathbf{g}^2_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)|, |\eta(\mathbf{g}^1_\delta, \mathbf{g}^2_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)|\rangle \text{ a.e.}\\ &=|\mu(\mathbf{g}^1_\delta, \mathbf{g}^2_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)| \text{ a.e.} \end{aligned}$$

場合 2

$\mu=(\nu\upharpoonright\eta)$，ここに ν，η に表われる "(" と "⟨" の数は k より少ない項とする．この場合の証明は場合 1 と全く同様である．□

系 7.2　$\mu=\mu(\mathbf{x}_{i_1}, \cdots, \mathbf{x}_{i_n})$ を $\mathscr{L}$ の項とし $g^1, \cdots, g^n\in Z$ とする．各 $\delta\in I$ に対し

$$h_\delta=|\mu(\mathbf{g}^1_\delta, \cdots, \mathbf{g}^n_\delta)|$$

とおくと

$$\bar{h}=|^*\mu(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*$$

証明 今 $h \in Z$ と仮定すると

$$\bar{g} = |{}^*\mu(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*$$

とおいて，定理7.1を用いれば，$h_\delta = g_\delta$ a.e. であり，定理4.3によって $\bar{h} = \bar{g}$ となり所要の結果を得る．

次に，定理7.1の証明と同様に，帰納法によって $h \in Z$ を示す．μ が定数ならば $\mu = \mathbf{b}$，だからすべての δ に対して $h_\delta = b$．よって $h \in Z$ である．μ が変数ならば $\mu = \mathbf{x}_{ij}$ であり $h = g^j \in Z$ を得る．

帰納法によることにして $\mu = \langle \nu, \eta \rangle$ とする．各 $\delta \in I$ に対して

$$h_\delta = \nu(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n),$$
$$l_\delta = \eta(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)$$

とおく．帰納法の仮定より，ある m に対し k_δ, $l_\delta \in S_m$ a.e. となる．このときは3節の補題13によって $h_\delta \in S_{m+2}$ a.e. である．

終りに $\mu = (\nu \upharpoonright \eta)$ の場合も $h_\delta \in S_m$ a.e. (定理3.2の証明におけるように) であることを除いて論法は同じである．□

定理 7.3 (ウォシュの定理)† $\alpha = \alpha(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$, $n \geq 0$ を $\mathscr{L}$ の論理式, g^1, $\cdots$, $g^n \in Z$ とする．このとき

$$* \models {}^*(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)$$

は次のものと同値である：

$$\models \alpha(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n) \quad \text{a.e.}$$

証明 α の中に表われる記号 ¬, &, ∃ の数 k に関する帰納法によって証明する．それが0のときは適当な項 μ, ν に対して

$$\alpha = (\mu = \nu) \quad \text{または} \quad \alpha = (\mu \in \nu)$$

である．

$\alpha = (\mu = \nu)$ の場合，${}^*\alpha = ({}^*\mu = {}^*\nu)$ であり，定理7.1と4.3を用いると

$$* \models {}^*\alpha(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)$$

は次の式

$$|{}^*\mu(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_* = |{}^*\nu(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|_*$$

と同値であり，それは

$$|\mu(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)| \text{ a.e.}$$

と同値となり，さらに

$$\models \alpha(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n) \text{ a.e.}$$

---

† ウォシュの定理のさらに一般的条件の下での議論については Bell and Slomson [1] を参照.

と同値である．

$\alpha=(\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{\nu})$ のときも，$=$ を $\in$ に代えるだけで証明は同じである．

$k>0$ の場合は三つの場合に分けて考える．

場合 1

$\alpha=\neg\beta$ のとき，帰納法の仮定を用いて

$$*\models^{*}\alpha(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\mathbf{\bar{g}}^{n})$$

と順次に同値な関係を得る：

$$*\models^{*}\beta(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})$$

$$\models\beta(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\ \text{a.e. でない}$$

$$\models\beta(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\quad\text{a.e.}$$

$$\models\alpha(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\quad\text{a.e.}$$

場合 2

$\alpha=(\beta\,\&\,\gamma)$ のとき，帰納法の仮定を用いて

$$*\models^{*}\alpha(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})$$

と順次に同値な関係を得る：

$$*\models^{*}\beta(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})\qquad\text{かつ}\quad *\models^{*}\gamma(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})$$

$$\models\beta(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\ \text{a.e.}\quad\text{かつ}\quad\models\gamma(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\ \text{a.e.}$$

$$\models\alpha(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\ \text{a.e.}$$

場合 3

$\alpha(\mathbf{x}_{i_1},\ \cdots,\mathbf{x}_{i_n})=(\exists\,\mathbf{x}_k\in\mu)\beta(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_{i_1},\ \cdots,\mathbf{x}_{i_n})$ で $\mu=\mu(x_{i_1},\ \cdots,x_{i_n})$ は $\mathscr{L}$ の項のとき，

$$*\models^{*}\alpha(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})\quad\text{かつ}\quad\bar{h}=|^{*}\mu(\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})|_{*}$$

と仮定しよう．このときは ${}^{*}\mathscr{L}$ での意味論より，$\bar{g}\in\tilde{W}$ が存在して

$$\bar{g}\in\bar{h}\quad\text{かつ}\quad *\models^{*}\beta(\bar{\mathbf{g}},\bar{\mathbf{g}}^{1},\ \cdots,\bar{\mathbf{g}}^{n})$$

である．だから定理 4.3 と帰納法の仮定より

$$g_{\delta}\in h_{\delta}\ \text{a.e.}\quad\text{かつ}\quad\models\beta(\mathbf{g}_{\delta},\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\ \text{a.e.}$$

であり，定理 7.1 によって

$$h_{\delta}=|\mu(g_{\delta}^{1},\ \cdots,g_{\delta}^{n})|\quad\text{a.e.}$$

であるから

$$\models\alpha(\mathbf{g}_{\delta}^{1},\ \cdots,\mathbf{g}_{\delta}^{n})\quad\text{a.e.}$$

となり所要の結果を得る．

逆に，

$$\models \alpha(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n) \quad \text{a.e.}$$

を仮定する．そこで，この性質をもつ $\delta \in I$ の全体を A とすると $\mu(A)=1$ である．そこで，すべての $\delta \in I$ に対して

$$h_\delta = |\mu(\mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)|$$

とおくと，系7.2によって $h \in Z$，よって例えば，$h_\delta \in S_m$ a.e. である．だから各 $\delta \in A$ に対して $t=t(\delta)$ が存在して

$$t \in h_\delta \quad \text{かつ} \quad \models \beta(\mathbf{t}; \mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)$$

である．そこで I から $\hat{S}$ への写像 g を，$\delta \in A$ に対しては $g_\delta = t(\delta)$，$\delta \notin A$ に対しては $g_\delta = \phi$ とする．このようにすると，S_m の推移性によって，$\delta \in A$ なら $h_\delta \in S_m$ であったから $g_\delta \in S_m$ を得る．これより $g_\delta \in S_m$ a.e.．したがって $g \in Z$ であり，さらに

$$g_\delta \in h_\delta \quad \text{a.e.} \quad \text{かつ} \quad \models \beta(\mathbf{g}_\delta, \mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n) \quad \text{a.e.}$$

である．定理4.3と帰納法の仮定より

$$\bar{g} \in \bar{h} \quad \text{かつ} \quad {*}\models^* \beta(\bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)$$

であり，系7.2によって $\bar{h} = |^*\mu(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)|$ でもあるから

$${*}\models^* \alpha(\bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)$$

を得る．□

$n=0$ の場合のウォシュの定理も重要である：

移行原理：α を $\mathscr{L}$ の文章とするとき

$${*}\models^*\alpha \text{ と } \models \alpha \text{ は同値である．}$$

移行原理は超準解析の基本的道具の一つである．$\mathscr{L}$ の α に対して $\models\alpha$ と同値であるような数学的定理は，その代りに ${*}\models^*\alpha$ を証明すれば，それが証明できるということである．もし α の中に $b \in S$ の定数 $\mathbf{b}$ のみが含まれるときは，${}^*\alpha = \alpha$ であって，移行原理は次の形になる：

$${*}\models \alpha \text{ と } \models \alpha \text{ は同値である．}$$

ウォシュの定理を用いて $\hat{S}$ の定義可能な部分集合の重要な算法が定義できるのである．

定理 7.4 $\alpha=\alpha(\mathbf{x}_1)$，$\beta=\beta(\mathbf{x}_1)$ を $\mathscr{L}$ の論理式で

$$\{b \in \hat{S} \mid \models \alpha(\mathbf{b})\} = \{b \in \hat{S} \mid \models \beta(\mathbf{b})\}$$

であれば

$$\{\bar{g} \in \tilde{W} \mid {*}\models^*\alpha(\bar{\mathbf{g}})\} = \{\bar{g} \in \tilde{W} \mid {*}\models^*\beta(\bar{\mathbf{g}})\}$$

証明　ウォシュの定理を用いると

$$*\models{}^*\alpha(\bar{\mathbf{g}})$$

は次のものと同値である

$$\models\alpha(\mathbf{g}_\delta)\quad \text{a.e.}$$

仮定より

$$\models\beta(\mathbf{g}_\delta)\quad \text{a.e.}$$

再び，ウォシュの定理より

$$*\models{}^*\beta(\bar{\mathbf{g}})$$

と同値である．□

この定理により，次のように定義することができる．

定義　α は $\mathscr{L}$ の論理式で $A=\{b\in\hat{S}\,|\models\alpha(\mathbf{b})\}$ とするとき，

$$A^*=\{b\in\tilde{W}\,|\,*\models{}^*\alpha(\mathbf{b})\}$$

と記する．

上記の定理によって $^*A$ は A にのみ関係して，それを定義する個々の論理式 α に関係しないことが保証されているのである．

系 7.5　r を $\hat{S}$ の集合とするとき，r は $\hat{S}$ の定義可能な部分集合で $^*r=\bar{r}$ である．

証明

$$r=\{b\in\hat{S}\,|\models(\mathbf{b}\in\mathbf{r})\}$$

であるから

$$r^*=\{\bar{g}\in\tilde{W}\,|\,*\models(\bar{\mathbf{g}}\in\bar{\mathbf{r}})\}$$
$$=\{\bar{g}\in\tilde{W}\,|\,\bar{g}\in\bar{r}\}=\bar{r}\quad □$$

他方，$\hat{S}$ 自身 $\hat{S}$ の定義可能な部分集合である．例えば $\alpha(\mathbf{x}_1)=(\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1)$ として

$$\hat{S}=\{b\in\hat{S}\,|\models(\mathbf{b}=\mathbf{b})\}$$

($\hat{S}$ は確かに $\hat{S}$ の元ではない†)．すなわち，

$$^*(S)=\{b\in\tilde{W}\,|\,*\models(\mathbf{b}=\mathbf{b})\}=\tilde{W}.$$

これから先 $U=\hat{S}$ と記すことにしよう．すなわち U で特に標準域を示すものとする．だから $^*U=\tilde{W}$ であり，超準域としてよく $^*U$ を用いるのである．

---

† 通常の集合論では $x\in x$ を禁じている．しかしこのようなことを持込まなくても $\hat{S}\notin\hat{S}$ となることは明らかである．もし $\hat{S}\in\hat{S}$ ならば $\hat{S}\in S_n$ が成立し，$S_{n+1}\in S_n$ とか $S_{n+1}\subseteq S_n$ を得る．$\mathscr{P}(S_n)\subseteq S_{n+1}\subseteq S_n$ であるから S_{n+1} は S_n より大きな基数をもつことになり矛盾である．

さらに，各 $i\geq 0$ に対して $U-S_i=\hat{S}-S_i\notin\hat{S}$ である（もし $\hat{S}-S_i\in\hat{S}$ であれば $S_i\in\hat{S}$ であるから $\hat{S}=((\hat{S}-S_i)\cup S_i)\in\hat{S}$ を得ることになる）．

$U-S_i$ は $\neg(\mathbf{x}_1\in\mathbf{S}_i)$ を用いて定義可能である

$$U-S_i=\{b\in U\,|\models\neg(\mathbf{x}_1\in\mathbf{S}_i)\}$$

だから，系7.5を用いると

$$\begin{aligned}{}^*(U-S_i)&=\{b\in{}^*U\,|\,*\models\neg(\mathbf{x}_1\in\mathbf{S}_i)\}\\&={}^*U-\bar{S}_i={}^*U-{}^*S_i\end{aligned}$$

を得る．

定理4.3によれば，$\bar{f}\in\bar{S}$ は $f_\delta\in S$ a.e. と同値であり，それは $f\in Z$ と同値である．しかし W の定義により $\bar{f}\in W$ と $f\in Z$ は同値であるから $\bar{S}={}^*S=W$，そして前節の $i=0$ の場合によって

$${}^*(U-S)={}^*U-W.$$

写像 $*$(star) と $^-$(bar) についての注意： $x\in U-S$ に対しては $\bar{x}={}^*x$ であるから，これらのどちらでも好きな方を用いてよい．事実 Z から W への $^-$の写像は $\tilde{W}$ の構成においてのみ重要で応用の方では用いられない．だから $*$ の方の記法をこの写像として用いる．完全のために $x\in S$ に対しても ${}^*x=x$ としておく．このようにすると ${}^*U$ の**標準元**(standard element) は丁度 $x\in U$ に対する ${}^*x$ となる．

定理 7.6 $A\subseteq S$ ならば $A\subseteq{}^*A$ かつ ${}^*A\cap S=A$ である．

証明 $a\in A$ とすると $\models(\mathbf{a}\in\mathbf{A})$ であり，移行原理より ${}^*a=\bar{a}=a$ を用いて $*\models(\mathbf{a}\in{}^*\mathbf{A})$ であるから，$a\in{}^*A$ である．これより $A\subseteq{}^*A$ であり，したがって $A\subseteq{}^*A\cap S$ である．

逆に $a\in{}^*A\cap S$ とすると，$a\in S$ より ${}^*a=a$ である．これより $*\models({}^*\mathbf{a}\in{}^*\mathbf{A})$．したがって移行原理より $\models(\mathbf{a}\in\mathbf{A})$，すなわち $a\in A$ である． □

系7.5，定理4.3とよび4.5を用いるとただちに次の定理を得る：

定理 7.7 $x,y\in U$ とするとき，

（1） $x=y$ は ${}^*x={}^*y$ と同値

（2） $x\in y$ は ${}^*x\in{}^*y$ と同値

（3） ${}^*\langle x,y\rangle=\langle{}^*x,{}^*y\rangle$

（4） ${}^*(x\upharpoonright y)=({}^*x\upharpoonright{}^*y)$

定理 7.8 A,B を U の定義可能な部分集合とすれば，

$$^*(A\cup B)={}^*A\cup{}^*B,$$
$$^*(A\cap B)={}^*A\cap{}^*B,$$
$$^*(A-B)={}^*A-{}^*B$$

証明　$A=\{b\in U\,|\models\alpha(\mathbf{b})\}$, $B=\{b\in U\,|\models\beta(\mathbf{b})\}$ とすると

$$A\cup B=\{b\in U\,|\models(\alpha(\mathbf{b})\vee\beta(\mathbf{b}))\},$$
$$A\cap B=\{b\in U\,|\models(\alpha(\mathbf{b})\,\&\,\beta(\mathbf{b}))\},$$
$$A-B=\{b\in U\}|\models(\alpha(\mathbf{b})\,\&\,\neg\beta(\mathbf{b}))\}.$$

だから

$$\begin{aligned}^*(A\cup B)&=\{b\in{}^*U\,|\,*\!\models({}^*\alpha(\mathbf{b})\vee{}^*\beta(\mathbf{b}))\}\\&=\{b\in{}^*U\,|\,*\!\models{}^*\alpha(\mathbf{b})\}\cup\{b\in{}^*U\,|\,*\!\models{}^*\beta(\mathbf{b})\}\\&={}^*A\cup{}^*B.\end{aligned}$$

残りの場合も同様である．□

系 7.9　$^*\phi=\phi$, $^*\{a_1, \cdots, a_k\}=\{{}^*a_1, \cdots, {}^*a_k\}$.

証明　定理を用いると

$$^*\phi={}^*(U-U)={}^*U-{}^*U=\phi$$

同様に，$c=\{a\}=\{b\in U\,|\models(\mathbf{b}=\mathbf{a})\}$ ならば $^*c=\{b\in{}^*U\,|\,*\models(\mathbf{b}={}^*\mathbf{a})\}=\{{}^*a\}$. これは証明したいことの $k=1$ の場合である．k に関する帰納法で，定理を用いると，

$$\begin{aligned}^*\{a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}\}&={}^*(\{a_1, \cdots, a_k\}\cup\{a_{k+1}\})\\&={}^*\{a_1, \cdots, a_k\}\cup{}^*\{a_{k+1}\}\\&=\{{}^*a_1, \cdots, {}^*a_k\}\cup\{{}^*a_{k+1}\}\\&=\{{}^*a_1, \cdots, {}^*a_k, {}^*a_{k+1}\}\quad\Box\end{aligned}$$

定理 7.10　$^*U=\bigcup_{i=0}^{\infty}{}^*(S_i)$.

証明　$S_i\in U$ であるから $^*S_i\in{}^*U$. そして $^*U$ は推移的であるから $^*S_i\subseteq{}^*U$. これより $\bigcup_{i=0}^{\infty}{}^*S_i\subset{}^*U$ である．

逆に $\bar{f}\in{}^*U=\tilde{W}$ とすると，ある $i\in N$ について $f\in Z_i$ となる．$f_\delta\in S_i$ a.e. であるから，定理 4.3 より $\bar{f}\in\bar{S}_i={}^*S_i$ である．□

ここで $\mathscr{L}$ および $^*\mathscr{L}$ 論理式を短くそして読み易くするための便法を導入しておく．

(1)　太字は変数として用いる：これにより数学の通常の用法を反映させることができる (例えば，**n** で自然数を，**f** で函数をといった類である)．

（2）　活弧は誤解のない程度に自由に省略する．

（3）　数学的記法とか英語の言回しについて，下記の例のように理解できる程度に，変数も含め太字で記して，$\mathscr{L}$ の対応する論理式の代りに用いる．

1.　**X** is a set：　これは論理式

$$\alpha=\alpha(\mathbf{X})=(\mathbf{X}=\phi)\vee(\exists \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\mathbf{x}=\mathbf{x})$$

の単なる省略である．もちろん，A は $\models\alpha(\mathbf{A})$ が成立しているときは（S の）集合であり，それは丁度

$$\models \mathbf{A} \text{ is a set}$$

のことである．

2.　$\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y}$：　これに応ずる論理式（二変数の）は

$$\mathbf{X} \text{ is a set } \& \ \mathbf{Y} \text{ is a set } \& \ (\forall \mathbf{x}\in X)(\mathbf{x}\in Y)$$

であり，当然 $\models(\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B})$ となるのは A と B が集合で $A\subseteq B$ となることである．

3.　$\mathbf{Z}=\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ は次の式の略記である．

$$(\forall \mathbf{z}\in \mathbf{Z})(\exists \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\exists \mathbf{y}\in \mathbf{Y})(\mathbf{z}=\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle)\&(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\forall \mathbf{y}\in \mathbf{Y})(\exists \mathbf{z}\in \mathbf{Z})(\mathbf{z}=\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle)$$

4.　**f** maps **X** into **Y** は次の式の略記

$$\mathbf{X} \text{ is a set } \& \ \mathbf{Y} \text{ is a set } \& \ \mathbf{f} \text{ is a set } \& \ (\forall \mathbf{t}\in \mathbf{f})(\exists \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\exists \mathbf{y}\in \mathbf{Y})(\mathbf{t}=\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle)$$
$$\&(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\forall \mathbf{y}\in \mathbf{Y})(\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\in \mathbf{f}\leftrightarrow \mathbf{y}=\mathbf{f}\upharpoonright \mathbf{x}).$$

f maps **X** onto **Y** は次の式の略記

$$\mathbf{f} \text{ maps } \mathbf{X} \text{ into } \mathbf{Y} \ \& \ (\forall \mathbf{y}\in \mathbf{Y})(\exists \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\mathbf{y}=\mathbf{f}\upharpoonright \mathbf{x}).$$

応用に当っては，特別な集合 A とか論理式 α について，$^*A$ とか $^*\alpha$ を実際に計算する必要がしばしばおこる．上記の例について，このような観点から考えてみる．

1.　論理式　　**X** is a set については $^*\alpha=\alpha$ である（$^*\phi=\phi$ だから）．標準域においては α は $U-S$ を定める．よって超準域ではそれは $^*(U-S)$ を定めるが，すでに見たようにそれは $^*U-W$ である．

2.　$A\subseteq B$，$A, B\in U$ と仮定すれば $\models \mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ である．移行原理によって

$$*\models {}^*\mathbf{A} \text{ is a set } \& \ {}^*\mathbf{B} \text{ is a set } \& \ (\forall \mathbf{x}\in {}^*\mathbf{A})(\mathbf{x}\in {}^*\mathbf{B}).$$

$^*\mathscr{L}$ の意味論によって $^*A\subseteq{}^*B$ であることがわかる．これより

定理 7.11　$A, B\in U$ かつ $A\subseteq B$ ならば $^*A\subseteq{}^*B$ である．

定理 7.12　$B\in U$，$A\in{}^*U$ かつ $A\subseteq{}^*B$ ならば $A\in{}^*\mathscr{P}(B)$ である．

証明　定理7.10によって，ある $i\in N$ について $A\in{}^*S_i$ である．$P=\mathscr{P}(B)$ とすれば，

$$\models(\forall \mathbf{X}\in \mathbf{S}_i)(\mathbf{X}\subseteq\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{X}\in\mathbf{P})$$

である．移行原理によって

$$*\models(\forall \mathbf{X}\in {}^*\mathbf{S}_i)(\mathbf{X}\subseteq{}^*\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{X}\in{}^*\mathbf{P}).$$

${}^*\mathscr{L}$ での意味の解釈によって $A\in{}^*\boldsymbol{P}$ である． □

3. $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ で略記される論理式は定数を含まないので $*$ で写しても不変である．移行原理によると

$${}^*(A\times B)={}^*A\times{}^*B$$

であることが結論される．

4. f が A から B の上への (onto) 函数とする．移行原理によると

$$*\models(\forall \mathbf{t}\in{}^*\mathbf{f})(\exists \mathbf{x}\in{}^*\mathbf{A})(\exists \mathbf{y}\in{}^*\mathbf{B})(\mathbf{t}=\langle\mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle)$$

$$*\models(\forall \mathbf{x}\in{}^*\mathbf{A})(\forall \mathbf{y}\in{}^*\mathbf{B})(\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\in\mathbf{f}\leftrightarrow\mathbf{y}=\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{x})$$

$$*\models(\forall \mathbf{y}\in{}^*\mathbf{B})(\exists \mathbf{x}\in{}^*\mathbf{A})(\mathbf{y}=\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{x})$$

であるから，${}^*f$ は ${}^*A$ から ${}^*B$ の上への函数である．$*$ によって函数が函数に写されるということは非常に重要なことである．実際，次の定理を得る．

定理 7.13 $f\in U$ を $C\subseteq\mathrm{dom}(f)$ となる函数とするとき

$${}^*(f[C])={}^*f[{}^*C].$$

証明

$$f[C]=\{b\in U\,|\models(\exists \mathbf{c}\in\mathbf{C})(\mathbf{b}=\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{c})\}$$

であるから

$$\begin{aligned}{}^*(f[C])&=\{b\in{}^*U\,|\,*\models(\exists \mathbf{c}\in{}^*\mathbf{C})(\mathbf{b}={}^*\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{c})\}\\&={}^*f[{}^*C]\quad\Box\end{aligned}$$

重要な特別の場合は $A, B\subseteq S$ のときであり，この場合は $A\subseteq{}^*A$, $B\subseteq{}^*B$ (定理7.6) である．もし $a\in A$ で $b=f(a)$ であれば $\models(\mathbf{b}=\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{a})$ であり，移行原理より $*\models(\mathbf{b}={}^*\mathbf{f}\upharpoonright\mathbf{a})$, すなわち $b={}^*f(a)$ である．これより f と ${}^*f$ は A 上では一致すること，いいかえれば ${}^*f$ は f の A から ${}^*A$ への拡張である．このような場合 (すなわち $\mathrm{dom}(f)\subseteq\mathrm{dom}({}^*f)$ で ${}^*f$ は f の単なる拡張のとき), $*$ の記号をしばしば省略して ${}^*f$ の代りに単に f のように記する．

さらに一般に，$r\subseteq A\times B$ が関係であれば，定理7.11 と上の例 3 によって，${}^*r\subseteq{}^*(A\times B)={}^*A\times{}^*B$ である．再び $A, B\subseteq S$ ならば $r\subseteq{}^*r$ である：もし $\langle a, b\rangle\in r$ ならば $\models\langle\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle\in\boldsymbol{r}$ だから $*\models\langle\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle\in{}^*\boldsymbol{r}$, したがって $\langle a, b\rangle\in{}^*r$ である．函数の場合と同様，このような場合には $*$ を省略して，しばしば ${}^*r$ のことを r と記する．

8. 共起性，無限整数，内集合

今まで我々は超準解析の技術を展開してきたのであるが，何かしら少し空しい感じがある．まだ $S \subset W$ であることを示したわけでもなく，ただ $S \subseteq W$ を見てきただけである．もちろん，もし $S = W$ であれば $\hat{S} = \tilde{W} = \hat{W}$ であって超準域についてはちっとも面白いことなど起りそうにもない．そして実際，添字集合 I に何か新しい条件を加えないと，このように退化してしまう場合を除くことはできない．例えば $I = \{a\}$ のように唯一つの元から成るときは，I 上の極大フィルターは $F = \{I\}$ のみであって $\mu_F(\phi) = 0$，$\mu_F(I) = 1$ であり明らかに $W = S$ であることがわかる．I が有限である限り状況は同じである．

この章では，I として実際に非常に大きな特定の集合をとるのである．

鍵になる概念は共起性とよばれるものである．

定義 関係 r は次のような場合 U の中で**共起的**(または単に共起的)(concurrent) とよばれる．すなわち，$r \in U$ であって，$a_1, \cdots, a_n \in \mathrm{dom}(r)$ ならば常にある b が存在して，すべての $i = 1, \cdots, n$ に対して $\langle a_i, b \rangle \in r$ である．

我々は，このような共起的関係には数多く出合うであろう．

最初の例として，各 $k \in N^+$ に対して関係

$$r_k = \{\langle A, B \rangle \mid A \subseteq B \subseteq S_k\}$$

を考えよう．

$$\langle A, B \rangle \in r_k \quad \text{ならば} \quad A, B \in S_{k+1},$$
$$\text{だから} \quad \langle A, B \rangle \in S_{k+3}$$

となるので $r_k \subseteq S_{k+3}$，よって $r_k \in S_{k+4}$ となり $r_k \in U$ である．

r_k が共起的であることは：$A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{dom}(r_k)$ とする．すなわち

$$\langle A_1, B_1 \rangle \in r_k, \cdots, \langle A_n, B_n \rangle \in r_k$$

とする．そこで $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ とおくと，各 $i = 1, \cdots, n$ について $A_i \subseteq B_i \subseteq S_k$ であるから $A_i \subseteq B \subseteq S_k$ である．すなわち，各 $i = 1, \cdots, n$ について $\langle A_i, B \rangle \in r_k$ である．

共起性に対する基本的結果として

定理 8.1 (共起性定理)† r を U の中で共起的な関係とすると

$b \in {}^*U$ が存在して，すべての $a \in \mathrm{dom}(r)$ に対して $\langle {}^*a, b \rangle \in {}^*r$ である．

---

† 定理およびその証明は A.Robinson [15] による．

各々の dom(r) の有限集合 A に対して，共起性の定義より $q_A \in U$ があって

$$a \in A \quad \text{ならば} \quad \langle a, q_A \rangle \in r$$

である．直観的にいって，共起性定理は A が dom(r) に "近ずく" (approach) とき q_A の "極限" (limit) とでもいうべき b が存在することをいっている．

この共起性定理を証明するためには $\tilde{W}$ を構成するに当って添字集合 I およびその上の極大フィルター F に，何かさらに条件を加えなければならない．

実際には，添字集合 I を次のような函数 α の全体と定める。

（1） α は $r \in U$ なる共起的関係の全体で定義され，さらに

（2） 各々のこのような r に対して $\alpha(r)$ は dom(r) の有限部分集合．

我々は次のような概念を導入する（これは共起性定理を示す間だけ用いられる）．

$\alpha, \beta \in I$ について $\alpha \leq^{\dagger} \beta$ を各共起的 $r \in U$ に対して $\alpha(r) \subseteq \beta(r)$ のこととする．さらに $\alpha, \beta \in I$ について $\gamma = \alpha \vee \beta$ と書いて

$$\gamma(r) = \alpha(r) \cup \beta(r)$$

で定義される $\gamma \in I$ とする．[dom(r) の有限部分集合の和は dom(r) の有限部分集合であるから $\gamma \in I$ である]

次に，各 $\alpha \in I$ に対して

$$\Gamma_\alpha = \{\beta \in I \mid \alpha \leq \beta\}$$

と書く．このようにすると

補題 1. $$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha \vee \beta}$$

証明 $\gamma \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ は $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ と同値であり，順次に同値な関係を得る：

$$\text{すべての } r \text{ に対し } \alpha(r) \subseteq \gamma(r),\ \beta(r) \subseteq \gamma(r),$$

$$\text{すべての } r \text{ に対し } \alpha(r) \cup \beta(r) \subseteq \gamma(r),$$

これは，さらに

$$\alpha \vee \beta \leq \gamma \quad \text{そして} \quad \gamma \in \Gamma_{\alpha \vee \beta}$$

と同値である．□

補題 2. $G = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in I\}$ とすると G は I 上のフィルター基である．

証明 G がフィルター基であるための三つの条件を確かめる：

（1） $\alpha \in \Gamma_\alpha$ であるから，各 $\alpha \in I$ について $\Gamma_\alpha \neq \phi$，したがって $\phi \notin G$.

（2） もし $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta \in G$ であれば，補題 1 によって $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha \vee \beta} \in G$.

---

†[訳注] $\alpha < \beta$ とあるが等号の場合を考えて $\alpha \leq \beta$ としておいた．

（3） すべての共起的 $r \in U$ に対して $\alpha_0(r)=\phi$ なる α_0 をとると，$\alpha_0 \in I$ であるから $\Gamma_{\alpha_0} \in G$．したがって $G \neq \phi$ である．

補題2.3によって F を I 上の極大フィルターで $F \supseteq G$ となるものをとる，こうして F と I が定まった．

これらをまとめると：

補題 3. F は I 上の極大フィルターで，すべての $\alpha \in I$ について $\Gamma_\alpha \in F$ である．

さて，共起性定理を証明するために，r を共起的で $r \in S_k$ となる集合とする．f を I で定義され U に値を有する函数で，すべての $\alpha \in I$ に対して

$$a \in \alpha(r) \quad \text{ならば} \quad \langle a, f_\alpha \rangle \in r$$

となるものとする．$\alpha(r)$ が有限であり r が共起的であるから，このような f が存在するのである．そして各 α に対して（S_k は推移的であったから）$f_\alpha \in S_k$ であり，したがって $f \in Z$ である．$b=\bar{f}$ とすると $b \in {}^*U$ であり，我々はこの b が共起性定理の条件を満足することを示すのである．

補題 4. 各 $a \in \mathrm{dom}(r)$ について $\langle a, f_\alpha \rangle \in r$ a.e. である．

証明 $a \in \mathrm{dom}(r)$ を何でも固定された元として

$$T_a=\{\alpha \in I \mid \langle a, f_\alpha \rangle \in r\}$$

とおく．証明したいことは $\mu(T_a)=1$，すなわち $T_a \in F$ ということである．

このために，$\beta \in I$ を

$$\beta(X)=\begin{cases} \{a\} & X=r \quad \text{のとき} \\ \phi & X \neq r \quad \text{のとき} \end{cases}$$

とおくと，補題3によって $\Gamma_\beta \in F$ である．したがって $\Gamma_\beta \subseteq T_a$ を示せば十分である．しかし，これは次のように明らかである：

$$\begin{aligned} \alpha \in \Gamma_\beta \quad & \text{ならば} \quad \beta \leq \alpha \\ & \text{ならば} \quad \beta(r) \subseteq \alpha(r) \\ & \text{ならば} \quad a \in \alpha(r) \\ & \text{ならば} \quad \langle a, f_\alpha \rangle \in r \\ & \text{ならば} \quad \alpha \in T_a \quad \square \end{aligned}$$

さて，定理の証明は容易である．$b=\bar{f}$ として，$\alpha \in I$ について

$$h_\alpha=\langle a, f_\alpha \rangle$$

とおくと，定理4.5によって

$$\bar{h}=\langle \bar{a}, \bar{f} \rangle=\langle {}^*a, b \rangle$$

である．補題 4 によって $h_\alpha \in r$ a.e. であるから，定理4.3を用いて $\bar{h} \in \bar{r} = {}^*r$. すなわち $\langle {}^*a, b\rangle \in {}^*r$ を得る．これより共起性定理は証明された．□

さて $N \subseteq S$ と仮定しよう．すなわち自然数の全体が個体として標準域に含まれるものとする．このときはもちろん $N \in S_1$，したがって $N \subset \hat{S}$, $\mathscr{P}(N) \in \hat{S}$ 等を得る．定理7.6によって $N \subseteq {}^*N$ である．

次のような関係

$$L = \{\langle x, y\rangle \mid x \in N, y \in N, x < y\}$$

を考える．明らかに L は共起的である．それは $\mathrm{dom}(L) = N$ であって $a_1, \cdots, a_n \in N$ に対し b を $a_1, \cdots, a_n$ の最大元とすると $a_1Lb, \cdots, a_nLb$ が成立するからである．共起性定理より $b \in {}^*U$ が存在して，すべての $a \in N$ ($a \in N \subseteq S$ だから ${}^*a = a$ である) について

$$\langle a, b\rangle \in {}^*L$$

である．$L \subseteq N \times N$ であるから（7節の議論を思い出して）${}^*L \subseteq {}^*N \times {}^*N$ である，よって $b \in {}^*N$ である．$b \in N$ ？　もしそうであれば ${}^*b = b$ であり $* \models \langle {}^*a, {}^*b\rangle \in {}^*L$ (すべての $a \in N$) によって $\models \langle a, b\rangle \in L$ (移行原理より) であるから，$a < b$ がすべての $a \in N$ について成立する．すなわち b は最大の自然数でなくてはならず，そのようなものは存在しないのだから，$b \in {}^*N - N$ と結論せざるを得ないのである．だから ${}^*N - N \neq \phi$, $b \in {}^*N - N$ であるから定理7.6によって $b \notin S$，すなわち b は超準個体である．少なくとも超準個体は存在する！

このような論法によって S が無限である限り超準個体は存在するのである．それは S が無限なら N が S の中に1対1に埋込まれるからである．逆に，S が有限なら超準元は存在しないことは容易に示される．

$x, y \in {}^*N$ に対しても，関係 ${}^*L$ が $<$ の N から ${}^*N$ への拡張であるので，$\langle x, y\rangle \in {}^*L$ の代りに $x < y$ と記するのが自然であろう．同様に $x \leq y$ は $x < y$ または $x = y$ とする．

関係 $<$ が N 上の線形順序であることは

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N}) \neg (\mathbf{x} < \mathbf{x})$$

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{N})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{N})((\mathbf{x} < \mathbf{y} \,\&\, \mathbf{y} < \mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{x} < \mathbf{z})$$

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{N})(\mathbf{x} < \mathbf{y} \vee \mathbf{y} < \mathbf{x} \vee \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

であり，移行原理によって $<$ は ${}^*N$ 上の線形順序である．

次に ${}^*N - N$ の元は任意の自然数より大きいことを示す．

定理 8.2　$u \in {}^*N - N$ かつ $n \in N$ ならば $n < u$ である．

証明 そうでないと仮定すると

$$u \leq n$$

がある自然数 $n \in N$ について成立する．n をそのようなものの最小のものとする．

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N})(\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

であるから，移行原理によって

$$* \models (\forall \mathbf{x} \in {}^*\mathbf{N})(\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

である．${}^*\mathscr{L}$ での意味によって $u \not\leq 0$．だから $n \neq 0$，そこで $n = m+1$ とおけば $m \in N$ で

$$m < u \leq m+1$$

しかし，$m+1$ は標準的であるから $n \neq m+1$ である．これより

$$m < u < m+1$$

であるが

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N}) \neg (\mathbf{m} < \mathbf{x} < \mathbf{m} + \mathbf{1})$$

であり，$u \in {}^*N$ より移行原理によって

$$* \models \neg (\mathbf{m} < \mathbf{u} < \mathbf{m} + \mathbf{1})$$

を得るので矛盾である．□

この定理によって次のように定義するのがよいであろう：

定義 $u \in {}^*N$ について，$u \in N$ のとき**有限**(finite)，そして $u \in {}^*N - N$ のとき**無限**(infinite)(または**無限整数**(infinite integer))とよばれる．

これより ${}^*N$ の有限の元は標準元で，無限の元は超準元である．ともあれ，一つの無限の元を確認しただけであるが，ほかにも多く存在するのである．すなわち $P \in U$ となる函数で

$$\mathrm{dom}(P) = N \times N$$

であり

$$P(\langle m, n \rangle) = m + n$$

となるものがあるから，すべての $m, n \in {}^*N$ に対して

$$m + n = {}^*P(\langle m, n \rangle) \in {}^*N$$

とするのが自然であろう．これより $u \in {}^*N - N$ については $u+1, u+2, u+3, \cdots \in {}^*N$ である．移行原理を，$\mathbf{x}+\mathbf{1}$ を $\mathbf{P} \upharpoonright \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle$ の略記として

$$\models (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{N})(\mathbf{x} < \mathbf{x} + \mathbf{1})$$

に用いると，

$$u<u+1<u+2<u+3<\cdots$$

を得る．ゆえに $u+1, u+2$ 等はすべて無限である．

同様に $u, v\in {}^*N$，$u>v$ が与えられたとすると（移行原理によって），$u=v+z$ となる $z\in {}^*N$ がある．このとき $z=u-v$ と記すると（再び移行原理によって）$z<u$ である．すなわち $u\in {}^*N-N$ について

$$\cdots<u-3<u-2<u-1<u$$

である．これらのすべての ${}^*N$ の元はすべて無限である．それはもし，$u-k, k\in N$ ならば $u=(u-k)+k\in N$ となるからである．

それゆえ，無限整数 u より始めて，無限整数より成る次のような"ブロック"を得る：

$$\cdots<u-3<u-2<u-1<u<u+1<u+2<u+3<\cdots$$

移行原理によって

$$u<v<u+1$$

となる $v\in {}^*N$ は存在しない．しかしながら，与えられた"ブロック"に対してさらに大きな無限整数より成る他のブロックが存在する．例えば，$u+u$ なる整数が存在する，ここに各々の $k\in N$ について $u+k<u+u$ である．このような $v=u+u$ に対しては，それ自身次のブロックの一部である．

$$\cdots<v-3<v-2<v-1<v<v+1<v+2<v+3<\cdots$$

もちろん，$v<v+u<v+v$ 等であり，さらに大きな $u\cdot u$ とか u^u とかの無限整数も存在するのである．

逆の方向に進んで，$u\in {}^*N-N$ とすると，u または $u+1$ は（移行原理によって）$v+v$ の形をしている．この v は無限でなくてはならない．だから最初の（無限整数より成る）ブロックは存在しない．実際ブロックの順序は稠密なのである．それには v を含むブロックが u を含むブロックより前にあるとして

$$\cdots<v-1<v<v+1<\cdots<\cdots<u-1<u<u+1<\cdots$$

とすると，$u+v$ または $u+v+1$ の中の一方は $z+z$ の形に書かれる．これより，すべての $k, l\in N$ に対して $v+k<z<u-l$ となる．

結論として：${}^*N$ は N を**最初の部分** (initial segment) として含み，その後に最初の元も，最後の元ももたない稠密な順序をなすブロックの順序集合が続いている．各々のブロックは整数

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

と同型である．

$^*N-N$ は $^*N$ の空でない部分集合であるが，今まで見てきたように，最小元をもたない（各ブロックも同様である）．しかし空でない N の部分集合は必ず最小元を有する．このことは移行原理と矛盾しないのであろうか？　これは現代論理学が，一見して矛盾に見えるものから，色々の有用な結論を導き出す典型的な例であろう．

定理 8.3　$A\subset {}^*N$ が $A\in {}^*U$，$A\neq\phi$ を満たせば，A は最小元をもつ．

証明　いま $P=\mathscr{P}(N)$ とすれば，定理 7.12 によって $A\in {}^*P$ である．さて N の空でない部分集合は常に最小元を有するので

$$\models(\forall \mathbf{X}\in \mathbf{P})(\mathbf{X}=\boldsymbol{\phi}\vee(\exists \mathbf{m}\in \mathbf{X})(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\mathbf{m}\leq \mathbf{x}))$$

である．移行原理によって

$$*\models(\forall \mathbf{X}\in {}^*\mathbf{P})(\mathbf{X}=\boldsymbol{\phi}\vee(\exists \mathbf{m}\in \mathbf{X})(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{X})(\mathbf{m}\leq \mathbf{x}))$$

であり，$A\in {}^*P$ かつ $A\neq\phi$ であるから，$^*\mathscr{L}$ の意味論から，$\boldsymbol{m}\in A$ なる元があってすべての $\boldsymbol{x}\in A$ に対して $\boldsymbol{m}\leq\boldsymbol{x}$ である．すなわち，この $\boldsymbol{m}$ が A の最小元である．□

系 8.4　$^*N-N\notin {}^*U$

証明　そうでないとすると最小元を有する．□

$\widehat{W}$ の集合で $^*U$ の中にあるものを**内集合** (internal set), $\widehat{W}$ の集合で内集合でないものを**外集合** (external set) とよぶ．それらは文字通り全超準域 $^*U$ の外にあるのである．我々はすでに $^*N-N$ が外集合であることを示したので，外集合の存在は示されているわけである．

非常に重要な性質として，特定可能†な集合は内的であるということが証明可能である．

定理 8.5（内集合定理）　A を内集合，B を $^*U$ の定義可能な集合とすれば $A\cap B$ は内集合である．

証明
$$B=\{b\in {}^*U\mid *\models\alpha(\mathbf{b})\}$$

とする．ここに $\alpha=\alpha(\mathbf{x})$ は $^*\mathscr{L}$ の論理式である．α の中の定数のすべてを $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$, …, $\mathbf{g}^n$ とする．$\mathbf{y}_1$, …, $\mathbf{y}_n$ を α に表われない相異なる変数として $\gamma=\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n)$ を α の中の定数 $\mathbf{g}^i$ を $\mathbf{y}_i$ ですべて置換えて得られる論理式とする．この論理式 γ は $^*\gamma=\gamma$（γ は定数はないので）を満足する $\mathscr{L}$ の論理式であり，

†[訳注]　specific set とある．意味は次の定理で用いられている通りである．すなわち，$^*U$ の中で定義可能のこと．

$$\alpha(\mathbf{x})=\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{g}^1, \cdots, \mathbf{g}^n)$$

である．ウォシュの定理を用いると

$$B=\{\bar{h}\in {}^*U\,|\,*\models\gamma(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{g}}^1, \cdots, \bar{\mathbf{g}}^n)\}$$
$$=\{\bar{h}\in {}^*U\,|\models\gamma(\mathbf{h}_\delta, \mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)\ \text{a.e.}\}.$$

A は内集合であるから，ある $g\in Z$ に対して $A=\bar{g}$ である，例えば $g\in Z_n$ とする．函数 k をすべての $\delta\in I$ について

$$k_\delta=\{b\in g_\delta\,|\models\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)\}$$

と定める．$g_\delta\in S_n$ a.e. であり，各 δ について $k_\delta\subseteq g_\delta$ であるから $k_\delta\in S_{n+1}$ a.e.．したがって $k\in Z$ である．

そこで $\bar{k}=A\cap B$ であることを示せば証明が完成する．さて

$$\bar{h}\in A \text{ は } \bar{h}\in\bar{g} \text{ と同値}$$
$$h_\delta\in g_\delta\ \text{a.e. と同値}$$

であるから

$$A\cap B=\{\bar{h}\in {}^*U\,|\,h_\delta\in g_\delta\ \text{a.e. かつ}\ \models\gamma(\mathbf{h}_\delta, \mathbf{g}_\delta^1, \cdots, \mathbf{g}_\delta^n)\ \text{a.e.}\}$$
$$=\{\bar{h}\in {}^*U\,|\,h_\delta\in k_\delta\ \text{a.e.}\}$$
$$=\{\bar{h}\in {}^*U\,|\,\bar{h}\in\bar{k}\}=\bar{k}\quad\square$$

系 8.6 $B\subseteq A$ とし A は内集合であり，B は ${}^*U$ で定義可能であれば B は内集合である

証明 $B=A\cap B$ □

一つの応用として

系 8.7 N は外集合である．

証明 N が内集合，すなわち $N\in {}^*U$ とすると，${}^*N-N$ は次の式

$${}^*N-N=\{b\in {}^*U\,|\,*\models(\mathbf{b}\in {}^*\mathbf{N}\,\&\,\neg(\mathbf{b}\in\mathbf{N}))\}$$

によって定義可能（N が内的であることは ${}^*\mathscr{L}$ の中に $\mathbf{N}$ が定数（constant）として入っていることとして用いられている）．${}^*N$ は内的であって ${}^*N-N\subseteq {}^*N$ であるから ${}^*N-N$ が内集合となり，系8.4に反する．□

定理 8.8 A および B が内集合なら $A\times B$ も内集合である．

証明 定理7.10を用いる．$A, B\in {}^*S_i$ とすると定理3.1によって

$$\models(\forall\mathbf{X}\in\mathbf{S}_i)(\forall\mathbf{Y}\in\mathbf{S}_i)(\exists\mathbf{Z}\in\mathbf{S}_{i+3})(\mathbf{Z}=\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$$

移行原理によって

$$*\models(\forall\mathbf{X}\in {}^*\mathbf{S}_i)(\forall\mathbf{Y}\in {}^*\mathbf{S}_i)(\exists\mathbf{Z}\in {}^*\mathbf{S}_{i+3})(\mathbf{Z}=\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$$

である．$^*\mathscr{L}$ の意味論を用いて，$C=A\times B$ については $C\in {}^*S_{i+3}$ を得る．そして定理7.10を再び用いて C は内集合であることがわかる．□

定理 8.9 (内函数定理) f を A から B の中への函数とし，A, B を $^*U$ の内集合とする．そして $\mu=\mu(\mathbf{x})$ を $^*\mathscr{L}$ の項として

$$f(a)=|\mu(\mathbf{a})|_*$$

が各 $a\in A$ について成立すれば，f は**内函数**†(internal function) である．

証明 $f=\{c\in {}^*U \mid * \models (\exists \mathbf{x}\in \mathbf{A})(\exists \mathbf{y}\in \mathbf{B})(\mathbf{c}=\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \,\&\, \mathbf{y}=\mu(\mathbf{x}))\}$

であるから，f は $^*U$ の定義可能な部分集合である．そして $f\subseteq A\times B$ であり，定理8.8によって $A\times B$ は内集合であるから，系8.6によって f は内集合である．□

9. 要　　約

さて，超準解析の基本的技術の展開を終えたわけであるが，ここで今までに得られた結果についてどのようなものがあったかについて記しておこう．この章で用いられている方法の多くは基本的構成に必要なだけで，これより後では用いられていない．

読者諸氏が心に留めておくべき重要な概念をここに要約しておく：

(1) 我々は二つの域を導入した：一つは標準域 $U=\hat{S}$ で，これは単に適当な個体の集合 S (自明でなくすため無限の) からつくられた上部構造であり，他は超準域 $^*U=\tilde{W}$，これは $W\supseteq S$ (S が無限なら $W\supset S$) なる個体の集合と上部構造 $\hat{W}$ のいくらかの集合より成っている．

(2) $\hat{W}$ は $^*U$ の内集合 (internal set) と外集合 (external set) より成っている．

(3) U から $^*U$ への写像 $*$ が存在する．$x\in U$ に対して x^* となる $^*U$ の元 (すなわち写像 $*$ の値域の元) は**標準的** (standard) とよばれる．他の元は**超準的** (non-standard) とよばれる．

(4) 言語 $\mathscr{L}$, $^*\mathscr{L}$ はそれぞれ $U, {}^*U$ に関係した記述を与えることができる．写像 $*$ によって $\mathscr{L}$ の文章を $^*\mathscr{L}$ の文章に写すことができる．一番大切なことは移行原理が成立するということである．すなわち α が U で成立すれば $^*\alpha$ は

---

†[訳注] 単に internal とあるがその graph が内集合であるような函数のことで内函数 (internal function) と訳した．

${}^*U$ で成立する.

（5） S の中の共起的関係 r（すなわち，$A \subseteq \mathrm{dom}(r)$ で A が有限なら，ある b が存在してすべての $a \in A$ に対して $\langle a, b\rangle \in r$）に対してはその“極限”が ${}^*U$ の中にある．すなわち $b \in {}^*U$ が存在してすべての $a \in \mathrm{dom}(r)$ に対して $\langle a^*, b\rangle \in {}^*r$ である．これは後に明らかにされるような意味でコンパクト化と完備化を一度にやってしまったものである．

（6） 外集合が存在する．通常の自然数の全体も外集合である．そして内集合の一部分で ${}^*\mathscr{L}$ が定義可能な集合はすべて内集合である．

これらの基本的なことをよく記憶しておけば，これから後はうまく理解できるはずである．いまや，超準域がどのように構成されたかとは全く忘れてよいし，極大フィルター等意識の中から追い出しても全く差支えないのである．

演 習 問 題

1. F を I 上の極大フィルターとし，$A, B \in I$ について $A \cap B = \phi$ であれば

$$\mu_F(A \cup B) = \mu_F(A) + \mu_F(B)$$

であることを示せ（もちろん，この性質のゆえに μ_F は測度とよばれている）．

2. 数学的帰納法が N について成立するという $\mathscr{L}$ の文章を用いて，N が外集合であることを直接に示せ．

3. 定理8.8を内集合定理を用いて証明せよ．

4. σ を $\mathrm{dom}(\sigma) = N$ となるような函数とし，各 $n \in N$ に対して $\sigma(n) = \{m \in N \mid m \leq n\}$ とすれば，各 $n \in {}^*N$ に対して ${}^*\sigma(n) = \{m \in {}^*N \mid m \leq n\}$ であることを示せ．

5. ${}^*N$ の各々のブロックは外集合であることを示せ．

6. $r = \{\langle a, b\rangle \mid \models \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}$，$r \in U$ とすると ${}^*r = \{\langle a, b\rangle \mid * \models {}^*\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}$ であることを示せ．

7. $A \in U$ に対して ${}^*\mathscr{P}(A)$ は ${}^*A$ の内集合の全体であることを示せ．

2 実数と超実数

1. 順 序 体

今まで超準解析を自然数 N に対してのみ応用してきた．そこで次の例として超準解析を順序体に応用する．今までの構成を次の二つの異った目的に用いてみよう．

（1） 古典的な実数の〝構成〟に代るすっきりと美しい構成を与える．

（2） 実数 $\boldsymbol{R}$ に対応する $^*\boldsymbol{R}$ について研究する．

この章では，我々が必要とする順序体についての性質を得るために通常の方法のみを用いる．超準的方法は，その後2節で用いられる．

$D \subseteq S$ とし，0, 1 を D の元，+, · を $D \times D$ から D への写像とする．例によって $a+b$ で $+\upharpoonright\langle a, b\rangle$ を，$a \cdot b$ または ab で $\cdot\upharpoonright\langle a, b\rangle$ のことを記する．

下記のような文章（公理，sentence）の集り Φ を考える：

$\Phi 1.$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}+\mathbf{y})=(\mathbf{y}+\mathbf{x}))$

$\Phi 2.$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}))=((\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}))$

$\Phi 3.$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}+\mathbf{0})=\mathbf{x})$

$\Phi 4.$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\exists \mathbf{y} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{0})$

Φ5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})=(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}))$

Φ6. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})((\mathbf{x} \cdot(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}))=((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}))$

Φ7. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})((\mathbf{x} \cdot \mathbf{1})=\mathbf{x})$

Φ8. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\neg(\mathbf{x}=\mathbf{0}) \rightarrow (\exists \mathbf{y} \in \mathbf{D})((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})=\mathbf{1})$

Φ9. $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{1})$

Φ10. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})((\mathbf{x} \cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}))=(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})+(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}))$

文章の集り Φ が $\mathscr{L}$ で正しいということは，D が元 0, 1 および算法＋,・に関して**体** (field) をなすということである．さらに ＜ を D の関係として，次の文章の集り Ω を考える：

Ω1. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\neg(\mathbf{x}<\mathbf{x}))$

Ω2. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}<\mathbf{y} \,\&\, \mathbf{y}<\mathbf{z}) \rightarrow \mathbf{x}<\mathbf{z})$

Ω3. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\mathbf{x}<\mathbf{y} \vee \mathbf{y}<\mathbf{x} \vee \mathbf{x}=\mathbf{y})$

Ω4. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})(\mathbf{x}<\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{z}<\mathbf{y}+\mathbf{z})$

Ω5. $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{y} \in \mathbf{D})(\forall \mathbf{z} \in \mathbf{D})((\mathbf{x}<\mathbf{y} \,\&\, \mathbf{0}<\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}<\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$

文章の集り Φ, Ω が $\mathscr{L}$ の中で正しいことを，D が ＜ に関して**順序体** (ordered field) をなすという．（読者は前の文章を定義と考えてもよい）．

以下では D は順序体で，例によって $x>y$ で $y<x$ を，$x \leq y$ で $x<y$ または $x=y$ のことを記する．もし $x<y$ かつ $u<v$ ならば

$$x+u<y+u<y+v.$$

補題 1. $0<1$ であり，すべての $x \in D$ に対して $x<x+1$ である．

証明 Φ9 によって $0 \neq 1$. そこで $0<1$ でないとすると Ω 3 によって，$1<0$ である．Ω4 によって $0<-1$, Ω5 によって両辺に -1 を乗じて $0<1$ を得る．そして $x=x+0<x+1$ であるから証明できた．□

これより

$$0<1<1+1<1+1+1<\cdots$$

である．よって写像

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 1+1 & 1+1+1 & 1+1+1+1 & \cdots \end{array}$$

は N から D の中への順序同型であり，Φ1-3, Φ5-7 によって，この写像は算法＋,・を保つ．これを同一視写像とみなして N が D の中に埋め込まれていると考えるのが自然であろう．それゆえ，これより後では $N \subset D$ とする．

さて Q で有理数の全体を記すことにする．もちろん Q は一つの順序体である．そして Q の元は，$a, b \in N$ を用いて a/b または $-(a/b)$ の形に書けるので，Q の D の中への埋込み写像が決まり，それは同型写像である．これもやはり同一視の写像と考えて，今後 $Q \subseteq D$ とする．

補題 2. $x<y$ ならば $-y<-x$ である．

証明 もし $-x=-y$ ならば $y=x<y$ となり Ω1 に矛盾する．もし $-x<-y$ ならば $0=x+(-x)<y+(-y)=0$ であり，これも Ω1 に矛盾する．したがって Ω3 によって所要のものを得る．□

定義 すべての $x \in D$ に対して

$$|x|=\max(x, -x).$$

普通のやり方で場合に分けて次の性質を得る．

補題 3. $|x+y| \leq |x|+|y|$ かつ $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|$ である．

定義 すべての $x \in D$ に対して，ある $n \in N$ が存在して $x<n$ が成立するとき，D は**アルキメデス的** (Archimedean) であるとよばれ，そうでないとき D は**非アルキメデス的** (non-Archimedean) であるとよばれる．

有理数体はアルキメデス的順序体の例である．ここでアルキメデス的体の基礎的性質を示しておこう．

補題 4. D をアルキメデス的体とする．$x, y \in D$ について

$$x, y>0 \qquad y-x>1$$

ならば，ある $n \in N$ について $x<n<y$ である．

証明 D はアルキメデス的であるから $n>x$ となる自然数がある．n をそのような最小元とする．$x>0$ であるから $n \neq 0$ である．証明すべきことは $n<y$ である．n が最小であることより $n-1 \leq x$ であり，仮定より $1<y-x$ であるから $n=(n-1)+1<x+(y-x)=y$ である．□

定理 1.1 (稠密性) D をアルキメデス的体とし $x, y \in D$ について $x<y$ とする．このとき $r \in Q$ が存在して $x<r<y$ である．

証明

場合 1 $x>0$

D の正の元 $1/(y-x)$ を考えれば，D がアルキメデス的であるから，ある $m \in N$ に対して

$$\frac{1}{y-x}<m$$

である．これより

$$my-mx>1$$

補題 4 によって，ある $n\in N$ に対して

$$mx<n<my$$

である．$1/m>0$ によって

$$x<\frac{n}{m}<y$$

場合 2　$x=0$

$\frac{1}{y}<n$ となる $n\in N$ をとると，$0<\frac{1}{n}<y$ である．

場合 3　$x<0<y$

$r=0$ とすればよい．

場合 4　$y\leq 0$

補題 2 によって $0\leq -y<-x$ である．場合 1, 2 によって $-y<r<-x$ となる $r\in Q$ がある．補題 2 を再び用いて $x<-r<y$ を得る．□

空でない集合 $A\subseteq D$ について，すべての $x\in A$ に対して $x\leq l$ が成立するとき，$l\in D$ は A の**上界** (upper bound) とよばれる．さらにどんな $m<l$ も A の上界でないとき，l は A の**最小上界** (least upper bound) とよばれる．

定義　D のすべての空でない部分集合について，それが上界をもてば常に最小上界を有するとき D は**完備** (complete) であるという．

定理 1.2　完備な順序体はアルキメデス的である．

証明　D を完備な順序体でアルキメデス的でないとする．このときはある $x\in D$ が存在してすべての $n\in N$ に対して $x>n$ が成立する．この x は N の上界である．だから完備性によって N の最小上界 l がある．l が最小上界であったから l-1 は N の上界ではない．すなわちある $m\in N$ に対して $l-1<m$ である．これより $l<m+1$ となり矛盾である．□

定理 1.3　$D, \bar{D}$ を完備な順序体とする．このとき D から $\bar{D}$ への 1 対 1 で上への写像 ψ で，すべての $g\in Q$ に対して $\psi(g)=g$ であり $x, y\in D$ について $x<y$ と $\psi(x)<\psi(y)$ が同値となるものが一意的に存在する．

証明　$x\in D$ に対して $\psi(x)$ を $\bar{D}$ の元で集合

$$S_x=\{r\in Q\,|\,r<x\}$$

の最小上界とする．(S_x は $\bar{D}$ の中に上界を有する．それは $\bar{D}$ がアルキメデス的

であるから，ある $n\in N$ に対して $x<n$ となるからである).

$g\in Q$ に対しては g が S_g の上界であるから $\psi(g)\leq g$ である．さらに $x\in \bar{D}$ で $x<g$ とすると，稠密性によって，ある $r\in Q$ に対して $x<r<g$ である．これは $r\in S_g$ を意味し，x は S_g の上界ではない．これは $\psi(g)=g$ を意味している．

もし $x<y$ であれば，稠密性によって $g, r\in Q$ が存在して $x<g<r<y$ となる．g は S_x の上界であり $r\in S_y$ であるから $\psi(x)\leq g<r\leq\psi(y)$ である．逆に，$\psi(x)<\psi(y)$ であれば $x<y$ である．というのはもし $y<x$ ならば $\psi(x)<\psi(y)$ となるからである．

$\bar{\psi}$ を上の性質を有する他の写像とする．もし $r\in S_x$ とすると $r<x$ であり，したがって $r=\bar{\psi}(r)<\bar{\psi}(x)$ である．すなわち $\bar{\psi}(x)$ は S_x の $\bar{D}$ での上界である．そして次に示すように $\bar{\psi}(x)$ は S_x の最小上界でもあるので $\psi(x)=\bar{\psi}(x)$ となる．そこでこれを示すのであるが，$\bar{\psi}(y)<\bar{\psi}(x)$ とすると，上のようにして $y<x$ である，$r\in Q$ を $y<r<x$ となるようにとると $r\in S_x$ であるから $\bar{\psi}(y)<\bar{\psi}(r)=r$ であり $\bar{\psi}(y)$ は S_x の上界にはなり得ない．□

後でこの ψ は D と $\bar{D}$ の間の同型写像であることがわかる．

次に非アルキメデス的体に話を移そう．任意の順序体について次のように定める：

定義　$F=\{x\in D\,|\,$ある $n\in N$ に対して $|x|<n\}$．もし $x\in F$ のとき x は**有限** (finite)；もし $x\in D-F$ のとき x は**無限** (infinite) とよばれる．

定義　$I=\left\{x\in D\,\middle|\,x=0 \text{ または } \dfrac{1}{x}\in D-F\right\}$．$I$ の元は**無限小** (infinitesimal) とよばれる．

D がアルキメデス的であることは，次の同値な条件で特徴づけられる：

$$D=F, \qquad I=\{0\},$$

補題 5.　$x\in I$ とすべての $n\in N^+$ に対して $|x|<\dfrac{1}{n}$ となることは同値である．

証明　$x\in I$ は $x=0$ または $1/x$ が無限大ということと同値，それは $x=0$ またはすべての $n\in N$ に対して $|1/x|\geq n$ ということ，または $|x|\leq 1/n$ がすべての $n\in N^+$ について成立することと同値である．□

特別な場合として $x\in I$ ならば $x\leq 1$ であるから $I\subseteq F$ である．

定理 1.4　$x \in F$ かつ $y \in F$ ならば $x+y \in F$ かつ $xy \in F$ である（すなわち，F は D の部分環である）．

証明　$x, y \in F$ とすると，ある $n, m \in N$ に対して $|x|<m$，$|y|<n$ である．したがって $|x+y| \leq |x|+|y|<m+n$ であり $|xy|=|x|\cdot|y|<m\cdot n$ である．これは $x+y \in F$ かつ $xy \in F$ を意味している．□

定理 1.5　次の性質がある．

（1）　$x, y \in I$ ならば $x+y \in I$

（2）　$x \in I$ かつ $y \in F$ ならば $xy \in I$

（すなわち，I は F のイデアルである）

証明（1）　すべての $n \in N^+$ について

$$|x+y| \leq |x|+|y| \leq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$$

よって $x+y \in I$ である．

（2）　$y \in F$ であるから，ある $m \in N$ に対して $|y|<m$ である．よってすべての $n \in N^+$ について

$$|xy|=|x|\cdot|y|<m|x| \leq m\cdot\frac{1}{m\cdot n}=\frac{1}{n}$$

であり，$xy \in I$ を得る．□

定義　$x, y \in D$ かつ $x-y \in I$ のとき $x \approx y$ と記す．この場合，x は y に**無限に近い**（infinitesimally near）とか，単に x は y に**近い**（near）という．そうでない場合 $x \not\approx y$ と記す．

補題 6.　$\approx$ は D の上の同値律である．したがって F 上の同値律である．

証明　$x-x=0 \in I$ であるから $x \approx x$ である．$-1 \in F$ であるから，$x-y \in I$ ならば $y-x=(-1)(x-y) \in I$．すなわち，$x \approx y$ ならば $y \approx x$ である．次に，$x-y \in I$ かつ $y-z \in I$ ならば $x-z=(x-y)+(y-z) \in I$ である．□

I は環 F のイデアルであるから，商環 F/I を構成することができる．このようにすれば I を核とする F から F/I の上への自然な準同型写像が存在する．$x \in F$ である各元に対して $^\circ x$ で x のこの準同型写像による F/I の中の像とする．このようにすれば，$x, y \in F$ に対して $^\circ x={}^\circ y$ と $x-y \in I$ は同値である．すなわちこれは $x \approx y$ のときである．

写像 $^\circ$ は準同型写像であるから，次の準同型の等式を得る：

$$^\circ(x+y)={}^\circ x+{}^\circ y$$

$$°(xy) = °x \cdot °y$$

これを別な記法で記すると，$x, y, x_1, y_1 \in F$ に対して $x \approx x_1$ かつ $y \approx y_1$ ならば $x+y \approx x_1+y_1$ かつ $xy \approx x_1y_1$ ということである．

補題 7.　$x \in D-F$ ならば $1/x \in F$ である．

証明　$x \notin I$ であるから，ある $m \in N^+$ に対して $|x| > 1/n$．よって $|1/x| < n$ である．□

定理 1.6　F/I は体である．

証明　$°x \in F/I$, $°x \neq 0$ とすれば $x \notin I$ であり，補題 7 によって $1/x \in F$ である．したがって，

$$°x \cdot °\left(\frac{1}{x}\right) = °\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = °1 = 1.$$

すなわち $°x$ は F/I の中に逆元をもつ．□

複題 8.　$x \in F-I$，$x>0$ かつ $t \in I$ ならば $x+t>0$ である．

証明　x は正で無限小でないので，ある $n \in N^+$ に対して

$$x > \frac{1}{n}$$

である．$t<0$ の場合のみ考えればよい．t は無限小であるから $|t| < 1/n$ である．よって，

$$t \geq -\frac{1}{n}$$

となる．これら二つの式を加えると $x+t>0$ である．□

補題 8 を用いれば $°$ は順序を保つことが示される：

補題 9.　$x, y \in F$, $x<y$ かつ $x \not\approx y$ とし，さらに $x \approx x_1$, $y \approx y_1$ とすれば $x_1 < y_1$ である．

証明　$x<y$ であるから $y-x>0$ である．そこで

$$y_1 - x_1 = (y-x) + (y_1-y) + (x-x_1)$$

を考えれば，最初の項は正で無限小ではなく，第 2, 3 項は無限小であるから補題 8 によって $y_1 - x_1 > 0$，すなわち $x_1 < y_1$ である．□

補題 9 によれば次のように定義できる：

定義　$°x, °y \in F/I$ に対して

$°x < °y$ を $x<y$ かつ $x \not\approx y$ で定める．

系 1.7　$x, y \in F$ かつ $x \leq y$ ならば $°x \leq °y$ である．

証明　$x \not\approx y$ であれば $°x < °y$ であり，$x \approx y$ であれば $°x = °y$ である．□

定理 1.8　上記順序によって F/I は順序体である.

証明　$D=F/I$ として Ω1-5 が $\mathscr{L}$ で正しいことを確かめればよい.

(1)　$x\approx x$ であるから ${}^\circ x\nless{}^\circ x$ である.

(2)　${}^\circ x<{}^\circ y$, ${}^\circ y<{}^\circ z$ とすると, $x<y$, $y<z$ よって $x<z$ である. $0<y-x<z-x$ であるから $x\approx z$ ならば $y\approx x$ となる. すなわち $x\not\approx z$ であり ${}^\circ x<{}^\circ z$ を得る.

(3)　${}^\circ x\neq{}^\circ y$ とすれば $x\not\approx y$ であり $x<y$ または $y<x$ である. これより ${}^\circ x<{}^\circ y$ または ${}^\circ y<{}^\circ x$ を得る.

(4)　${}^\circ x<{}^\circ y$, すなわち $x<y$ かつ $x\not\approx y$ とする. このとき $x+z<y+z$ であり $x+z\not\approx y+z$ (なぜなら $(y+z)-(x+z)=y-z$). そして ${}^\circ x+{}^\circ z={}^\circ(x+z)$ かつ ${}^\circ y+{}^\circ x={}^\circ(y+z)$ であるから ${}^\circ x+{}^\circ z<{}^\circ x+{}^\circ y$ である.

(5)　${}^\circ x<{}^\circ y$, $0<{}^\circ z$ とする. このときは $x<y$, $x\not\approx y$, $0<z$, $0\not\approx z$. だから $xz<yz$ である. もし $xz\approx yz$ であれば, $y-x\in F-I$ であるから

$$z=(yz-xz)\left(\frac{1}{y-z}\right)\approx 0.$$

すなわち $xz\not\approx yz$ である. よって ${}^\circ x\cdot{}^\circ z={}^\circ(xz)<{}^\circ(yz)={}^\circ y\cdot{}^\circ z$ である. □

F/I は順序体であるから, 補題 1 の後の議論によって $Q\subseteq F/I$ と記してよい.

補題 10.　$g\in Q$ については ${}^\circ g=g$ である.

証明　${}^\circ$ は準同型であるから ${}^\circ 0=0$, ${}^\circ 1=1$ であり, ${}^\circ(n+1)={}^\circ n+1$ であるから, 帰納法によって $n\in N$ ならば ${}^\circ n=n$ である. $-n\in N$ については ${}^\circ(-n)=-{}^\circ n=-n$ であり, ${}^\circ(m/n)={}^\circ m/{}^\circ n=m/n$ が整数 m, n について成立する.

定理 1.9　F/I はアルキメデス的体である.

証明　${}^\circ x\in F/I$ とすると, $x\in F$ であるから, ある $m\in N$について $x<n$. これは ${}^\circ x\leq n<n+1$ を意味している. □

2. アルキメデス的体の超準的理論

この節では, D はアルキメデス的順序体で $D\subseteq S$ と仮定する (もちろん S は標準域 $U=\hat{S}$ の個体の集合である). したがって写像 $+$, $\cdot$ とか関係 $<$ はすべて U の元である.

${}^*D$ については何がわかるであろうか？　最初に $D\subseteq{}^*D\subseteq{}^*S$ であり, 次に

$^*+$, $^*\cdot$ 等は $^*D\times{}^*D$ から $^*D$ への写像で，$^*<$ は $^*D$ 上の関係であることなどがわかる．なぜなら $D\subseteq S$ であるから，（定理1-7.13の後の議論で説明したように）* を省略して単に $+$，$\cdot$ とか $<$ と書くことにする．D が順序体であることは

$$\models\Phi_i \quad i=1,2,\cdots,10 \qquad \models\Omega_i \quad i=1,2,\cdots,5$$

と同値であり，移行原理によって

$$*\models\Phi_i \quad i=1,2,\cdots,10 \qquad *\models\Omega_i \quad i=1,2,\cdots,5$$

を得る．すなわち $^*D$ は算法 $+$，$\cdot$ および関係 $<$ によって順序体である．

$N\subseteq D$ であるから $^*N\subseteq{}^*D$ であり，$^*N$ は N のすべての元より大きな元（無限整数）を有することはすでに知っているから，次のことがわかる：

定理 2.1 $^*D$ は非アルキメデス的順序体である．

この定理はちょっと反省を要する．D は順序体であるから，移行原理によって $^*D$ も順序体であると進んできたわけであるが，ではなぜ同じ方法で $^*D$ がアルキメデス的であることが示せないのであろうか？　例えば一つの試みは次のようなものであろうか：すなわち D はアルキメデス的であるから

$$\models(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{D})(\exists \mathbf{n}\in \mathbf{N})(\mathbf{x}<\mathbf{n})$$

である．よって移行原理により

$$*\models(\forall \mathbf{x}\in {}^*\mathbf{D})(\exists \mathbf{n}\in {}^*\mathbf{N})(\mathbf{x}<\mathbf{n})$$

を得る．これからは各 $x\in{}^*D$ に対して $x<n$ となる $n\in{}^*N$ が存在することがわかるだけで，$x\in N$ が得られるわけではない．教訓とでもいうべきか，移行原理を用いるときはこのようなことに注意を要することを知っておかねばならない．

さて第1節の考察を非アルキメデス的体 $^*D$ に用いる．そしてそこでの記法 F，I，$^\circ$，$\approx$ 等をここでも用いることにする．$D\subseteq{}^*D$ であり $^*D$ 上の函数 $+$，$\cdot$ は D 上のそれの拡張であるから D は $^*D$ の部分体である．事実 D はアルキメデス的であり $D\subseteq F$ である．さて，準同型写像 $^\circ$ は F を F/I に写し，$D\subseteq F$ であるから D をも F/I の中に写す．よって次の性質を得る．

補題 $^\circ$ は D から F/I への同型写像である．

証明 $^\circ$ は準同型写像であるから，$^\circ$ が1対1であることを示せばよい．そこで $x, y\in D$ について $^\circ x={}^\circ y$ とすると，$x-y\in I$ であり，すべての $n\in N^+$ に対して $|x-y|\leq 1/n$ である．D がアルキメデス的であることより $x-y=0$ である．これは $x=y$ を意味している．□

例によって，この同型写像により D は F/I に埋込まれていると考えるとよい．すなわち，$x \in D$ については $^{\circ}x = x$ とする．だからアルキメデス的体 D が他のアルキメデス的(定理1.9 参照)体 F/I に埋込まれているのである．

定理 2.2 $$^*N \cap F = N$$

証明 $N \subseteq F$ かつ $N \subseteq {}^*N$ であるから，$^*N \cap F \subseteq N$ を示せば十分である．しかし定理1-7.6 によって $^*N \cap F \subseteq {}^*N \cap S = N$ である．□

定理 2.3 集合 F, D, I および $^*D - F$ はすべて $^*D$ の外部分集合である．

証明 内集合定理を用いる．明らかに $^*N$ は $^*U$ の定義可能な部分集合である．たとえば，論理式 $(\mathbf{x} \in \mathbf{N})$ を考えればよい．

もし F が内集合であるとすると $^*N \cap F = N$ も内集合となるが，すでに知っている(系1-8.7)ように N は外集合である．

次に

$$N \subseteq {}^*N \cap D \subseteq {}^*N \cap F = N$$

であるから

$$N = {}^*N \cap D$$

となり同じ論法によって D も外集合である．

さて，$K = {}^*D - F$ とおき，K が内的として

$$A = \{x \in {}^*U \mid * \models \mathbf{x} \in {}^*\mathbf{D} \,\&\, \neg(\mathbf{x} \in \mathbf{K})\}$$

とすると，A は $^*U$ で定義可能であり

$$A = {}^*D - K = {}^*D - ({}^*D - F) = F$$

である．$F \subseteq {}^*D$ であったから，(系1-8.6)によって F は内集合となり矛盾である．よって $^*D - F$ は外集合である．

終りに I が内集合として，$x \in D - \{0\}$ に対しては $g(x) = 1/x$，$g(0) = 1$ とおくと $g \in U$ であり

$$^*N - N = \{n \in {}^*N \mid * \models ({}^*\mathbf{g} \upharpoonright \mathbf{n}) \in \mathbf{I}\}$$

であるから $^*N - N$ が内集合となる．□

共起性定理の一つの応用として，次の定理を得る：

定理 2.4 (デデキント†の定理) A, B を D の空でない部分集合とし

---

†[訳注] J.Dedekind (1831-1916) 実数論の Dedekind の切断，代数的数体の Dedekind の ζ 函数でもよく知られている．集合論の創始者 G.Cantor のよき理解者でもあった．

$$a\in A \text{ かつ } b\in B \text{ ならば } a<b$$

とする．このとき

$$a\in A \text{ かつ } b\in B \text{ ならば } a\leq c\leq b$$

となる．$c\in F/I$ が存在する．

証明　関係 r を対 $\langle a, b\rangle$ で $a\in A$，$b\in D$，$a\leq b$ であり b は B のすべての元より小なものの集りをとする．そこで r が共起的関係であることを示す．すべての $a\in A$ に対して $\langle a, a\rangle\in r$ であるので $\mathrm{dom}(r)=A$ である．次に a_1, …, $a_k\in A$ とし $b=\max_{1\leq i\leq k} a_i$ とおくと $b\in D$ であり，$a_i\leq b$ である．そして $b\in A$ であるから b は B のすべての元より小さい．これより $i=1, \cdots, k$ について $\langle a_i, b\rangle\in r$ である．これは r が共起的であることを示している．したがって共起性定理により $t\in {}^*U$ なる元 t が存在して，すべての $a\in A$ に対して $\langle a, t\rangle\in {}^*r$ である．

$r\subseteq A\times D$ であったから ${}^*r\subseteq {}^*A\times {}^*D$ であり $t\in {}^*D$ である．r の定義より

$$\models(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{A})(\forall \mathbf{y}\in \mathbf{A})(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\in \mathbf{r}\rightarrow \mathbf{x}\leq \mathbf{y})$$

$$\models(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{A})(\forall \mathbf{y}\in \mathbf{D})(\forall \mathbf{u}\in \mathbf{B})(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\in \mathbf{r}\rightarrow \mathbf{y}<\mathbf{u})$$

である．移行原理を用いると

$$a\in {}^*A \text{ かつ } b\in {}^*B \text{ ならば } a\leq t\leq b$$

であることがわかる．$B\neq\phi$ であるから t は有限で，系1.7 によって $a\in A$, $b\in B$ に対しては

$$a={}^\circ a\leq {}^\circ t\leq {}^\circ b=b$$

であり，$c={}^\circ t$ とおいて所要の結果を得る．□

この定理と有理数の稠密性によって次の定理を得る：

定理 2.5　F/I は完備な順序体である．

証明　$C\subseteq F/I$, $C\neq\phi$ として，C が F/I の中に上界をもつとする．このとき C が最小上界をもつことを示す．そこで

$$B=\{b\in D \mid b \text{ は } C \text{ の上界}\}$$

とおく．l を F/I の中の C の任意の上界とする（F/I がアルキメデス的であるから）ある $n\in N$ に対して $l<n$ である．この n は明らかに B に属する．よって $B\neq\phi$ である．

次に $A=D-B$ とする．$C\neq 0$ であるから $x_0\in C$ をとる．するとある $n\in N$ に対して $-x_0<n$ である．すなわち $x_0>-n\in D$, よって $-n$ は C の上界でな

い．これは $A \neq \phi$ を意味している．

ここでデデキンドの定理の仮定が満たされていることを示す．$a \in A$，$b \in B$ とする．$a \in A$ より a は C の上界ではない．よってある $x \in C$ に対して $a < x$ である．$x \in C$ であり b は C の上界であるから $x \leq b$，すなわち $a < x \leq b$ を得る．

デデキンドの定理を用いると，ある $c \in F/I$ に対して

$$a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ ならば } a \leq c \leq b$$

である．あと示すべきことは c が C の最小上界であることである．

c は C の上界である：　そうでないとすると，ある $x \in C$ に対して

$$x > c$$

となる，F/I はアルキメデス的であるから，有理数 r で

$$x > r > c$$

となるものがある．r は C の上界でなく有理数であるから D に属する．これより $r \in A$．しかしこれより $r \leq c$ となり矛盾である．

c は C の最小上界である：　$d < c$ で d は C の上界とする．$r \in Q$ を $d < r < c$ となるように選ぶと，$r \in D$ であるから，同様にして r は C の上界で $r \in B$．よって $c \leq r$ となり矛盾である．□

いずれわかるように，移行原理を用いて U における "任意に細かい" 近似の代りに $^*U$ における "無限小" 近似で代えるということがしばしばなされる．

この節の終りに，そのような一つの例を与えておこう．

定理 2.6　各 $x \in D$ に対して $x \approx g$ となる $g \in {}^*Q$ が存在する．

証明　Q が D の中で稠密 (定理1.1) によって，各 $x \in D$ に対して

$$\models (\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}^+)(\exists \mathbf{g} \in \mathbf{Q})(|\mathbf{x} - \mathbf{g}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}})$$

である．移行原理によって

$$* \models (\forall \mathbf{n} \in {}^*\mathbf{N}^+)(\exists \mathbf{g} \in {}^*\mathbf{Q})(|\mathbf{x} - \mathbf{g}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}})$$

となる．そこで $n \in {}^*N - N$ とすると $^*\mathscr{L}$ の意味論より，ある $g \in {}^*Q$ に対して

$$|x - g| < \frac{1}{n}$$

すなわち，$x \approx g$ である．□

3. 実　　数

第2節では $D\subseteq S$ は特に指定されていないアルキメデス的体であった．ここでは D を有理数体 Q にとることにする．この場合には $R=F/I$ と記すことにする．一般に D は F/I の中に同型に埋込まれる．すなわち $Q\subseteq R$ である．

定理2.5に注意すると：

定理 3.1　完備順序体 R が存在する．

実数体の"構成"と通常よばれるものは，その存在と順序体としての一意性(同型写像による)までを含めている．定理3.1の標準的証明では実数の(デデキンドの切断とか，コーシー†の基本列等による)"構成"を必要とするし，算法 $+$, $\cdot$ とか関係 $<$ について色々の性質を確かめてゆくことは仲々手間のかかるところである．移行原理によればこれらは一度にすんでしまうし，残る完備性の方も共起性定理によればよいのである．

我々の議論を完全なものとするために，D と $\overline{D}$ を二つの完備順序体とする．定理1.3によって Q 上恒等的な(一意的) D から $\overline{D}$ の上への順序同型写像 ϕ がある．この ϕ が実際に同型写像であることを示すのである．

このために，D および $\overline{D}$ が標準的個体の集合 S の部分集合になっているとする．(当然のことであるが，超準域の中の完備順序体であれば何でもよいわけで，その存在がわかれば，それを標準域にもってくることは何の支障もないのである)そうすると ${}^*D$, ${}^*\overline{D}$ は(非アルキメデス的)順序体で ${}^*\phi$ は ${}^*D$ を ${}^*\overline{D}$ の上に写す．$D\subseteq{}^*D$ であり $\overline{D}\subseteq{}^*\overline{D}$ であるから，${}^*\phi$ の代りに ϕ と記すと，定理1.3に移行原理を用いて

(1)　$x, y\in{}^*Q$ については $x<y$ と $\phi(x)<\phi(y)$ は同値，

(2)　$g\in{}^*Q$ については $\phi(g)=g$ である．

補題 1.　$x\in D$ かつ $g\in{}^*Q$ ならば

$$x\approx g \text{ と } \phi(x)\approx\phi(g) \text{ は同値である．}$$

証明　$x\approx g$ は順次，次のものと同値である：

$$\text{すべての } n\in N^+ \text{ について } g-\frac{1}{n}<x<g+\frac{1}{n}$$

---

†[訳注]　A.Cauchy (1789-1857)　Cauchy の積分定理や Cauchy の基本列等でも有名である．行列論，実函数論，複素函数論その他多くの業績がある．

$$\text{すべての } n \in N^+ \text{ について } g-\frac{1}{n}<\psi(x)<g+\frac{1}{n}$$

これは $\psi(x) \approx g$ と同値である．□

補題 2． $x, y \in D$ については，次の両式が成立する：

$$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y),$$
$$\psi(xy)=\psi(x)\cdot\psi(y).$$

証明 定理2.6によって，ある $g, r \in {}^*Q$ に対して

$$x \approx g, \qquad y \approx r.$$

したがって，D がアルキメデス的であることより

$$x+y \approx g+r, \qquad xy \approx g\cdot r.$$

補題1によって

$$\psi(x) \approx g, \qquad \psi(y) \approx r,$$
$$\psi(x+y) \approx g+r, \qquad \psi(xy) \approx g\cdot r.$$

したがって

$$\psi(x+y) \approx \psi(x)+\psi(y),$$
$$\psi(xy) \approx \psi(x)\cdot\psi(y).$$

これらの式の両辺は標準元（すなわち D の元）であるから，$\approx$ を $=$ で置換えてよい．□

補題2と定理3.1を合せると，

定理 3.2 実数体 R は同型を除いて一意的に存在する．

4. 超 実 数

2節では，D はアルキメデス的順序体で $D \subseteq S$ とした．そしてそれについての ${}^*D$ について調べてきた．3節で見てきたように特に $D=Q$ としたときには実数体 R が得られたわけである．

この節では $D=R$ とおき非アルキメデス的順序体（定理2.1）${}^*R$ を考える．そしてこの体を**超実数**（hyper real number）とよぶ．$Q \subset R$ であったから ${}^*Q \subset {}^*R$ であり $R \subset {}^*R$ でもある．等号が成立していないのは ${}^*R$ には無限整数があるからである．

${}^*R$ は非アルキメデス的であるから，1節での考察が応用される．F は ${}^*R$ の

有限元の全体，I は $^*R$ の無限小元の全体である．さらに ° は F† から順序アルキメデス体 F/I の中への準同型写像である．(定理1.8, 1.9)．続いて2節で F/I が完備順序体であること(定理2.5)を見てきた．3節では，F/I が R と一意的に同型であること，そして F/I を R と同一視したのである．

要約しておくと，$R \subseteq S$ より始めて，超準域において非アルキメデス的体 $^*R$ を得た．そして写像 ° は $^*R$ の有限の元の全体の環から R の中への準同型写像である．有限の x に対して $^\circ x$ を x の**標準部分** (standard part) とよぶ．

次に今まで得られたことで当面関係のある部分を定理の形でまとめておく．

定理 4.1 $x, y \in F$ とするとき，次の性質を得る．

$$^\circ(x+y) = {}^\circ x + {}^\circ y$$

$$^\circ(x \cdot y) = {}^\circ x \cdot {}^\circ y$$

$$x \leq y \text{ と } {}^\circ x \leq {}^\circ y \text{ は同値}$$

$$x, y \in R \text{ ならば } {}^\circ x = x.$$

定理 4.2 $x, y, x_1, y_1 \in F$ のとき，$x \approx x_1$，$y \approx y_1$ であれば

$$x + y \approx x_1 + y_1, \qquad x \cdot y \approx x_1 \cdot y_1.$$

さらに次のような無限小の計算規則を得る：

定理 4.3 (1) $x \approx 0$，$y \approx 0$ ならば $x + y \approx 0$

(2) $x \approx 0$，$y \in F$ ならば $x \cdot y \approx 0$

(3) $x \not\approx 0$，$x \in F$ ならば $1/x \in F$.

証明 (1), (2)は定理1.5を今の場合に用いただけである．(3)については1節の補題7と比較すればよい．□

系 4.4 $x \in F$，$x \not\approx 0$，$x \approx y$ ならば $1/x \approx 1/y$ である．

証明

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}(x - y)$$

であるから，定理4.3の(2), (3)による．□

関係 $x \approx y$ ($x \approx y$ は $x - y \in I$ のこと) は $^*R$ 上の (F 上だけではなくて) 同値関係 (1節，補題6) である．$x \in F$ については x を含む同値類は唯一の実数 $^\circ x$ を含む，x の標準部分である．

定理2.6は今は次のように書くことができる．

定理 4.5 すべての実数 x について，$x \approx g$ となる $g \in {}^*Q$ が存在する．

---

†[訳注] 原著で $^*R$ とあるが F のことであろう．または $^*R$ の"有限の元の全体"からと補うべきか．

5. 実数列および函数

この節では超実数を用いて，初等実解析学の典型的結果が，超準解析を用いるとどのように示されるかを見よう．我々が実際に用いるのは，関係 $R\subset{}^*R$ と移行原理がすべてである．

ここでは体系的にするというのが目的ではない．というのは，これらについてはいずれ後で，もっと一般の設定の下で議論を展開することになるであろうから．以後 R^+ で正の実数 (positive real number) を記すと，移行原理によって ${}^*R^+={}^*(R^+)$ は正の超実数の全体である．

$\{s_n|n\in N^+\}$ を実数列，すなわち s は N^+ から R の中への函数とする．このときは ${}^*s$ は ${}^*N^+$ (もちろん，${}^*N^+={}^*N-\{0\}$) を ${}^*R$ に写す函数である．当然のことではあるが，無限の n についても ${}^*s(n)$ のことを単に s_n と記する．このようにすると：

定理 5.1 $s_n\to L$ とすべての無限の n について $s_n\approx L$ ということは同値である．

証明 $s_n\to L$ とすると，$\varepsilon\in R^+$ が与えられると，この ε に対して，$n_0\in N$ が存在して

$$\models(\forall \mathbf{n}\in \mathbf{N})(\mathbf{n}\geq \mathbf{n}_0\to|\mathbf{s}_n-\mathbf{L}|<\boldsymbol{\varepsilon}).$$

移行原理を用いると，すべての $n\in{}^*N$ について $n\geq n_0$ ならば

$$|s_n-L|<\varepsilon.$$

n_0 は有限であるから，すべての $n\in{}^*N-N$ について成立する．ε は"任意"であるから $|s_n-L|\approx 0$，すなわち，すべての無限整数に対して $s_n\approx L$ である．

逆に，すべての $n\in{}^*N-N$ について $s_n\approx L$ とする．任意の $\varepsilon\in R^+$ について，$s_n\approx L$ によって，

$$|s_n-L|<\varepsilon$$

が任意の $n\in{}^*N-N$ について成立する．特に n_0 を無限整数とすると $n\geq n_0$ について $|s_n-L|<\varepsilon$ が成立する．よって

$$*\models(\exists \mathbf{n}_0\in{}^*\mathbf{N})(\forall \mathbf{n}\in{}^*\mathbf{N})(\mathbf{n}\geq \mathbf{n}_0\to|\mathbf{s}_n-\mathbf{L}|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

である．移行原理によって，標準的意味において $s_n\to L$ が成立することがわかる．□

系 5.2 $s_n\to L$，$t_n\to M$ とすれば

$$s_n+t_n\to L+M,$$

$$s_n t_n \to LM,$$

そして，もし $M \neq 0$ ならば

$$\frac{s_n}{t_n} \to \frac{L}{M}.$$

証明　n を無限大とすると $s_n \approx L$，$t_n \approx M$ である．よって定理4.3を用いると $s_n + t_n \approx M + M$, $s_n t_n \approx L \cdot M$ となる．これは最初の二式が正しいことを意味している．

M は実数であるから有限である．よって無限の n についても t_n は有限である．系4.4によって $1/t_n \approx 1/M$ で，これより

$$\frac{s_n}{t_n} = s_n \cdot \frac{1}{t_n} \approx L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M} \quad \square$$

すべての $\varepsilon \in R^+$ について $|s_n - x| < \varepsilon$ となる n が無限個あるとき，x は点列 $\{s_n | n \in N^+\}$ の**極限点** (limit point) であるとよばれている．

定理 5.3　次の二つの性質は同値である：

x は $\{s_n | n \in N\}$ の極限点，

$x \approx s_n$ となる無限整数 n が存在する．

証明　x が $\{s_n\}$ の極限点とすると，

$$\models (\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N})(\exists \mathbf{m} \in \mathbf{N})(\mathbf{m} > \mathbf{n} \,\&\, |\mathbf{s}_m - \mathbf{x}| < \boldsymbol{\varepsilon})$$

である．移行原理によって

$$* \models (\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in {}^*\mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{n} \in {}^*\mathbf{N})(\exists \mathbf{m} \in {}^*\mathbf{N})(\mathbf{m} > \mathbf{n} \,\&\, |\mathbf{s}_m - \mathbf{x}| < \boldsymbol{\varepsilon}).$$

ε を無限小に，そして n を無限大にとる．n より大きな m で $|s_m - x| < \varepsilon$ となるものが存在するから (m は無限大)，その m に対して $\varepsilon \approx 0$ であることより，$s_m \approx x$ である．

逆に，ある無限整数 n について $s_n \approx x$ とする．$\varepsilon \in R^+$ とすると $|s_n - x| < \varepsilon$ である．よって $m \in N$ に対しては $n > m$ であるから

$$* \models (\exists \mathbf{n} \in {}^*\mathbf{N})(\mathbf{n} > \mathbf{m} \,\&\, |\mathbf{s}_n - \mathbf{x}| < \boldsymbol{\varepsilon}).$$

移行原理によって，ある $n \in N$ が存在して $n > m$ であり $|s_n - x| < \varepsilon$ である．$m \in N$ は任意であったから無限個の n についてこの不等式が成立する．$\square$

通常の記法にしたがって，$a, b \in R$ で $a \leq b$ について

$$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$$

と記する．

定理 5.4　f を $[a, b]$ から R への函数とする．点 $x_0 \in [a, b]$ において f が

x_0 で連続であることと，$x \approx x_0$ ならば $f(x) \approx f(x_0)$ であることは同値である．

ここに $^*[a, b]$ から $^*R$ の中への函数 $^*f$ のことを f と記してある．

証明　$A=[a, b]$ とし，f を点 x_0 で連続する．$\varepsilon \in \mathrm{R}^+$ に対して $\delta \in R^+$ があって，

$$\models(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A})(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\boldsymbol{\delta} \rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから，移行原理より，$x \in {}^*A$ かつ $|x-x_0|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ である．したがって $x \approx x_0$ とすると，$|x-x_0|<\delta$ であるから

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

であるが，ε は任意であったから $|f(x)-f(x_0)|$ はどんな正実数よりも小さい．よって無限小，すなわち

$$f(x) \approx f(x_0).$$

逆に，$x \in {}^*A$ かつ $x \approx x_0$ ならば $f(x) \approx f(x_0)$ と仮定する．任意の $\varepsilon \in R^+$ に対して $\delta \approx 0$ となるようにとれば

$$* \models(\exists \boldsymbol{\delta} \in {}^*\mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{x} \in {}^*\mathbf{A})(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\boldsymbol{\delta} \rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

である．移行原理より，f が x_0 で連続であるという標準域での条件を得る．□

次に連続性の超準特徴づけを用いて，古典的定理の超準的証明を与えよう．

定理 5.5　f を $[a, b]$ で連続的な函数とし，$f(a)<0<f(b)$ とする．このとき，$a<c<b$ となる c で $f(c)=0$ となるものが存在する．

証明　最初に次のような点列を定義する：

$$t_i^{(n)}=\begin{cases} a+\left(\dfrac{b-a}{n}\right)i & i \in N,\ 0 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{その他のとき}. \end{cases} \tag{‡}$$

これは区間 $[a, b]$ を n 等分する点列である．これを $t(\langle n, i\rangle)=t_i^{(n)}$ で定められた

$$t : N \times N \longrightarrow R$$

の函数とみなすことができる．したがって $t^* : {}^*N \times {}^*N \longrightarrow {}^*R$ である．$t_i^{(n)}$ で $^*t \restriction \langle n, i\rangle$ のことを $n, i \in {}^*N$ の場合にも記すことにする．移行原理によって (‡) が $n, i \in {}^*N$ について成立する．

さて $\nu \in {}^*N-N$ をとり，次の集合を考える．

$$L=\{i \in {}^*N \mid f(t_i^{(n)})>0,\quad i \leq \nu\}$$

L は，定義可能な集合である．例えば，次の式

$$\mathbf{i} \in {}^*\mathbf{N} \,\&\, (\mathbf{f} \restriction (\mathbf{t} \restriction \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{i}\rangle))>0$$

がその定義式である.

$L\subseteq{}^*N$ であるから内集合定理によって L は内集合である. $f(b)>0$ より $\nu\in L$ であるから, $L\neq\phi$ で, L は空でない内集合であるから, **最小元** (least element) j を有する (定理 1-8.3). すなわち

$$f(t_j^{(\nu)})>0.$$

$f(a)<0$ であったから $j\neq 0$ であり, これより

$$f(t_{j-1}^{(\nu)})\leq 0.$$

$a\leq t_j^{(\nu)}\leq b$ であるから $t_j^{(\nu)}$ は有限である. 今 $c={}^\circ(t_j^{(\nu)})$, すなわち $t_j^{(\nu)}$ の標準部分を考えると,

$$c\approx t_j^{(\nu)}$$

であり, しかも

$$t_j^{(\nu)}\approx t_{j-1}^{(\nu)}$$

である. これはその差が無限小の数 $(b-a)/\nu$ であることより得られる. よって定理 5.4 を用いると

$$f(t_j^{(\nu)})\approx f(c)$$

および

$$f(t_i^{(\nu)})\approx f(t_{j-1}^{(\nu)})$$

を得る. $f(c)$ は標準的であるから

$$f(c)={}^\circ f(t_j^{(\nu)})={}^\circ f(t_{j-1}^{(\nu)}).$$

しかし, 上の不等式と定理 4.1 によって

$${}^\circ f(t_j^{(\nu)})\geq 0 \qquad {}^\circ f(t_{j-1}^{(\nu)})\leq 0$$

である. これは $f(c)=0$ を意味している. □

他の例は

定理 5.6 f を $[a, b]$ 上の連続函数とすると, f はそこで最大値をとる.

証明 $t_i^{(n)}$ を前定理と同様のものとする. このとき,

$$\models(\forall \mathbf{n}\in \mathbf{N})(\exists \mathbf{i}\in \mathbf{N})(\mathbf{0}\leq \mathbf{i}\leq \mathbf{n}$$
$$\&(\forall \mathbf{j}\in \mathbf{N})(\mathbf{0}\leq \mathbf{j}\leq \mathbf{n}\rightarrow \mathbf{f}\restriction(\mathbf{t}\restriction\langle \mathbf{n}, \mathbf{i}\rangle)\geq \mathbf{f}\restriction(\mathbf{t}\restriction\langle \mathbf{n}, \mathbf{j}\rangle)))$$

である. これは実数の有限集合

$$\{f(t_0^{(n)}),\ f(t_1^{(n)}),\ \cdots, f(t_n^{(n)})\}$$

は最大値をもつからである. 移行原理を用い, ν を無限整数とする. 最大値があることより, ある $0\leq i\leq \nu$ なる i で, すべての $0\leq j\leq \nu$ なる j に対して,

$$f(t_1^{(\nu)})\geq f(t_j^{(\nu)})$$

となるものがある．この i に対して $c={}^{\circ}(t_i^{(\nu)})$ とおく．$x\in[a,b]$ を任意の標準的数とすれば，移行原理によって，ある $0\leq j<\nu$ があって

$$t_j^{(\nu)}\leq x\leq t_{j+1}^{(\nu)}$$

となる．$(b-a)/\nu\approx 0$ であるから，$x={}^{\circ}(t_j^{(\nu)})$ である．連続性を用いると，

$$f(c)={}^{\circ}(f(t_i^{(\nu)}))\geq{}^{\circ}(f(t_j^{(\nu)}))=f(x).$$

これは $f(c)$ が最大値であることを意味している．□

はじめてこのような場面に出合った学生が，定理5.5のような f の0点を定めるとき $f(x)$ が負でなくなる"最初"の点であるとか，定理5.6の場合では $f(x)$ の"最大"を与える点としてとらえようと試みるのを思い出させる点は印象的である．

次のものは

定理 5.7　f が $[a,b]$ 上で一様連続となることと，すべての $x,x'\in[a,b]$ について $x\approx x'$ ならば $f(x)\approx f(x')$ ということは同値である．

証明　f が $[a,b]$ 上一様連続とする．任意の $\varepsilon\in R^+$ に対してある $\delta\in R^+$ をとって

$$\models(\forall \mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}])(\forall \mathbf{y}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}])(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|<\boldsymbol{\delta}\rightarrow|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}')|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

となるようにできる．移行原理より $x,x'\in{}^*[a,b]$ に対して

$$|x-x'|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

である．そこで $x\approx x'$ とすると明らかに $|x-x'|<\delta$ であるから $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ であり，ε は任意の正実数であるから $f(x)\approx f(x')$ となる．

逆に，$x,x'\in[a,b]$ かつ $x\approx x'$ ならば $f(x)\approx f(x')$ と仮定する．$\varepsilon\in R^+$ に対して無限小の δ をとれば，

$$*\models(\exists\boldsymbol{\delta}\in{}^*\mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{x}\in{}^*[\mathbf{a},\mathbf{b}])(\forall \mathbf{y}\in{}^*[\mathbf{a},\mathbf{b}])(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|<\boldsymbol{\delta}\rightarrow|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}')|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

である．したがって移行原理より，標準域での一様連続性を得る．□

定理 5.8　f が $[a,b]$ 上連続であれば，f は $[a,b]$ 上一様連続である．

証明　$x,x'\in{}^*[a,b]$ について $x\approx x'$ とする．証明すべきことは $f(x)\approx f(x')$ である．$x,x'\in{}^*[a,b]$ とすると，$a\leq x,x'\leq b$ であるから，x,x' は有限である．よって，ある $t\in[a,b]$ に対して $t={}^{\circ}(x)={}^{\circ}(x')$，すなわち $x\approx t$ かつ $x'\approx t$ となる．f は t で連続するから $f(x)\approx f(t)$ かつ $f(x')\approx f(t)$ である．よって $f(x)\approx f(x')$ となる．□

6. 延長定理

$\{s_n|n\in{}^*N^+\}$ を $^*N^+$ で添字づけられた超実数の集りとする．このようなとき，ちょっと "けしからぬことばづかい" を許すことにして，$\{s_n\}$ を**列** (sequence) とよぶことにする．もちろん $s\subseteq{}^*N^+\times{}^*R$ である．興味がある場合は s が内集合，とかまたは別のことばで点列 $\{s_n|n\in{}^*N\}$ が内的な場合である．

定理 6.1 $\{s_n|n\in{}^*N\}$ を内的超実数列とする．$|s_n|\leq M$, $M\in{}^*R$ がすべての $n\in N^+$ について成立すれば，ある $\nu\in{}^*N-N$ が存在してすべての $n<\nu$ について $|s_n|\leq M$ が成立する．

これは N^+ 上の不等式 $|s_n|\leq M$ がある無限整数での切片まで延長されることを意味している．

証明 $A=\{n\in{}^*N||s_n|>M\}$ とおく．A は内的集合 $^*N$ の部分集合で定義可能であるから系1-8.6によって内集合である．

$A=\phi$ の場合は，ν を任意の無限整数として定理は成立する．

$A\neq\phi$ の場合は，A が内的であったから定理1-8.3によって最小元 $\nu\in{}^*N$ を有する．もちろん $n<\nu$ ならば $|s_n|\leq M$ である．仮定より $\nu\notin N$ である．そして A は N^+ と互いに素である．□

定理 6.2 (無限小延長定理) $\{s_n|n\in{}^*N^+\}$ を超実数の内的点列とする．すべての $n\in N^+$ に対して $s_n\approx 0$ とすると，ある $\nu\in{}^*N-N$ が存在してすべての $n<\nu$ について $s_n\approx 0$ である．

諸者の理解の度合を試すため，上の正しい証明をまねて，"誤った"証明を与えることから始めてみよう．

間違った証明 $A=\{n\in{}^*N|s_n\not\approx 0\}$ とする．もし $A=\phi$ であればそれでよい．そうでないとすると，A の最小元 ν をとると，$n<\nu$ ならば $s_n\approx 0$ である．仮定より ν は無限大でなくてはならない．□

何がよくないのであろうか？ A が必ずしも内的でないのである．事実 A の定義条件に無限小の数の外集合 I が用いられている．だから A は必ずしも最小元をもたないのである．

正しい証明を与えるために

$$s=\langle s_n|n\in{}^*N^+\rangle=\{\langle n, s_n\rangle|n\in{}^*N^+\}$$

とおき，$n\in{}^*N^+$ に対して $t_n=n\cdot s_n$ とおく．すると s が内的函数であったから

各 $n\in{}^*N^+$ に対して

$$t_n=|\mathbf{n}\cdot(\mathbf{s}\upharpoonright\mathbf{n})|_*$$

である．したがって1節の定理8.9を用いると $\{t_n|n\in{}^*N^+\}$ はやはり内的である．

さて今度は

正しい証明† $t_n=n\cdot s_n$ とおく．$n\in N^+$ に対して $s_n\approx 0$ であるから $n\in N^+$ について $t_n\approx 0$ である．したがって

$$n\in N^+ \quad \text{ならば} \quad |t_n|\leq 1$$

である．(我々は"外的条件" $t_n\approx 0$ をそれより弱い"内的条件" $|t_n|\leq 1$ に移したのである) 今まで見てきたように $\{t_n|n\in{}^*N^+\}$ は内的であったから，定理6.1によって，ある $\nu\in{}^*N-N$ に対して

$$n<\nu \quad \text{ならば} \quad |t_n|\leq 1$$

となる．これより n が無限大で $n<\nu$ ならば $|s_n|\leq\dfrac{1}{n}\approx 0$ となる．□

無限小延長定理の一つの応用として，連続函数の一様収束による極限函数が連続となることを示しておく．ここで一様収束性に対応する超準的な性質を導いておこう．このために $s_n(x)$ が $s(x)$ に一様収束することを $s_n(x)\Rightarrow s(x)$ と記すことにする．

定理 6.3 $[a, b]$ 上で $s_n(x)\Rightarrow s(x)$ となることと，すべての $x\in{}^*[a, b]$, $\nu\in{}^*N-N$ について $s_\nu(x)\approx s(x)$ であることは同値である．

一様収束性については"各点"の意味から"一様性"への移行に当って $[a, b]$ の元というところをすべて ${}^*[a, b]$ の元でおき換えた形になることに注意しておくとよい．

証明 $[a, b]$ 上で $s_n(x)\Rightarrow s(x)$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $n_0\in N$ があって

$$\models(\forall\mathbf{n}\in\mathbf{N})(\forall\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}])(\mathbf{n}\geq\mathbf{n}_0\rightarrow|\mathbf{s}_n(\mathbf{x})-\mathbf{s}(\mathbf{x})|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

である．移行原理より，すべての $n\in{}^*N$ に対して

$$x\in{}^*[a, b] \text{ かつ } n\geq n_0 \text{ ならば } |s_n(x)-s(x)|<\varepsilon.$$

そこで $x\in{}^*[a, b]$ かつ $\nu\in{}^*N-N$ とすると，$\nu\geq n_0$ であるから

---

†[訳注] $A=\{k\in{}^*N^+|(\forall n\in{}^*N^+)(\forall m\in{}^*N^+)(n\leq k\,\&\,m\leq k\rightarrow|s_n|<\frac{1}{m})\}$ を考えて定理6.1を用いてもよい．

$$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$$

である．これがすべての $\varepsilon>0$ について成立するので $s_n(x)\approx s(x)$ である．

逆に ε を任意の正数として，$n_0\in{}^*N-N$ とすると

$$*\models(\exists \mathbf{n}_0\in{}^*\mathbf{N})(\forall \mathbf{n}\in{}^*\mathbf{N})(\forall \mathbf{x}\in{}^*[\mathbf{a},\mathbf{b}])(\mathbf{n}\geq\mathbf{n}_0\rightarrow|\mathbf{s}_n(\mathbf{x})-\mathbf{s}(\mathbf{x})|<\boldsymbol{\varepsilon})$$

である．移行原理を用いると所要の結果を得る．□

定理 6.4　各 $n\in N^+$ について $s_n(x)$ は $[a,b]$ 上で連続とし，$[a,b]$ 上で $s_n(x)\Rightarrow s(x)$ とする．このとき $s(x)$ は $[a,b]$ 上で連続である．

証明　$x_0\in[a,b]$，$x\in{}^*[a,b]$，$x_0\approx x$ と仮定する．証明すべきことは $s(x)\approx s(x_0)$ である．さて各 $n\in N^+$ については $s_n(x)\approx s_n(x_0)$，すなわち $s_n(x)-s(x_0)\approx 0$ である．したがって無限小延長定理により，$s_\nu(x)-s_\nu(x_0)\approx 0$ がある $\nu\in{}^*N-N$ について成立する．定理6.3を用いると

$$s(x)\approx s_\nu(x)\approx s_\nu(x_0)\approx s(x_0)$$

が成立する．□

他の延長性の例としてコーシーの判定条件の超準解析を用いた記述がある．

定理 6.5　$\{s_n|n\in N^+\}$ を実数列とする．すべての $n,m\in{}^*N-N$ について $s_n\approx s_m$ ならば，ある実数 L について $s_n\rightarrow L$ が成立する．

証明　すべての $n\in{}^*N-N$ について s_n が有限であることを示せば十分である．なぜならば，どれかの $\nu\in{}^*N-N$ について $L={}^\circ(s_n)$ とおけば $s_\nu\approx L$ となる．仮定によって，すべての $\mu\in{}^*N-N$ に対して $s_\mu\approx s_\nu\approx L$ となり，定理5.1によって，$s_n\rightarrow L$ となる．

そこで $\nu\in{}^*N-N$ に対して s_ν が有限であることを示す．そこで集合

$$A=\{n\in{}^*N^+||s_n-s_\nu|<1\}$$

を考える．A は ${}^*U$ の定義可能な部分集合であり，$A\subseteq{}^*N$ であるから A は内的である．さて $n\in{}^*N-N$ に対しては $s_n\approx s_\nu$ であるから $|s_n-s_\nu|<1$ である．すなわち ${}^*N-N\subseteq A$ である．A は内集合で ${}^*N-N$ は外集合であるから（系1-8.4）${}^*N-N\neq A$．よって $n_0\in A\cap N^+$ となるものがある．したがって

$$\begin{aligned}|s_\nu|&=|s_{n_0}-(s_{n_0}-s_\nu)|\\&\leq|s_{n_0}|+|s_{n_0}-s_\nu|\leq|s_{n_0}|+1\end{aligned}$$

である．それゆえ s_ν は有限である．□

7. 超準的微分法

この節ではライプニッツ[†]の精神にしたがって一変数函数の微積分法を手短に展開する．我々の展開は通常の本のものとは少し違った方法で，フレッシェ[††]微分（4章4節）あたりまでを取扱える程度まで一般化しようと思う．

さて I は $^*R$ の無限小元の全体であったことを思い出して

定義 f, g を I から I への写像とする．そして

$$h \approx 0,\quad h \neq 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{f(h)-g(h)}{h} \approx 0$$

のとき，f と g は**同値**（equivalent）といって $f \sim g$ と記する．$(f(h)-g(h))/h = \alpha$ と記すならば，この条件は $\alpha \approx 0$ ならば

$$f(h) = g(h) + \alpha \cdot h$$

というように同値な形で書ける．ここに $\alpha \cdot h$ は $\alpha \cdot h/h$ が無限小であるという意味で"高位"の無限小である．だから $f \sim g$ は単に $f(h)-g(h)$ が h より高位の無限小であることを意味している．

定義 f を I から I への写像とするとき

$$\alpha, \beta \approx 0 \quad \text{ならば} \quad f(\alpha\beta) = \alpha f(\beta)$$

であれば，f は**局所線形**（locally linear）とよばれる．

局所線形写像 f については，$\alpha \approx 0$ とすると

$$f(0) = f(\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot f(0)$$

であるから $f(0) = 0$ を得る．

定理 7.1 f を局所線形写像とすると，有限の $k \in {}^*R$ が存在して

$$\alpha \approx 0 \quad \text{ならば} \quad f(\alpha) = k \cdot \alpha$$

が成立する．

証明 $\alpha, \beta \approx 0$，$\alpha, \beta \neq 0$ とすると

---

†[訳注] G.W.Leibniz (1647-1716) 微分積分法の発見，記号論理学や計算機にも深い着想を有し，独自の有効な記号法の発見をなしている．$f(x)$ 等の記法も彼によるという．

††[訳注] M.Fréchet (1878-) 位相空間や距離空間の概念の発見者の一人．ノルム空間で距離 $\|x-y\|$ について完備な空間をフレッシェ空間という．またフレッシェ微分は線形作用素の空間での微分である．

$$\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{\alpha f(\beta)}{\alpha\beta}=\frac{f(\alpha\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\beta f(\alpha)}{\beta\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

であるから，$\alpha\approx 0$，$\alpha\not\approx 0$ に対する一定値 $f(\alpha)/\alpha$ を k とおく．これより $\alpha\approx 0$ については $f(\alpha)=k\cdot\alpha$ である（この等式は $\alpha=0$ についても $f(0)=0$ であるから成立する）.

k が有限であることをみるには，そうでないと仮定すると $1/k\approx 0$ であるから

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=k\cdot\frac{1}{k}=1\not\approx 0$$

となるが，f が I から I への写像であることに反する．□

定理 7.2 $f_1(\alpha)=k_1\alpha$，$f_2(\alpha)=k_2\alpha$ を局所線形写像とするとき

$$f_1\sim f_2 \quad と \quad k_1\approx k_2$$

は同値な条件である.

証明 等式

$$\frac{f_1(\alpha)-f_2(\alpha)}{\alpha}=\frac{k_1\alpha-k_2\alpha}{\alpha}=k_1-k_2$$

によって左辺が無限小になるのは右辺が無限小になるときに限る．□

定義 $k\in R$ に対して $f(\alpha)=k\alpha$ となる場合 f は**微分**（differential）とよばれる.

系 7.3 任意の局所線形写像は唯一つの微分と同値である.

証明 定理7.1と定理7.2よりただちに導かれる．□

ライプニッツにしたがって，記号 dx, dt, dy 等を無限小値をとる変数として用いる.

定義 f を x_0 の近くで定義されている実函数とする．このとき $\Delta_{x_0}f$ を

$$\Delta_{x_0}f(dx)=f(x_0+dx)-f(x_0)$$

によって定める.

f が x_0 で連続であるというのは $\Delta_{x_0}f$ が I から I への写像になっていることに注意しておこう.

定義 f が点 x_0 で**微分可能**（differentiable）とは $\Delta_{x_0}f$ がある微分と同値になることと定める.

今まで示してきたことによれば f が x_0 で微分可能ならば唯一つの微分と同値であり，それを $d_{x_0}f$ または単に df と記する．そしてそれを f の（x_0 における）微分という．この場合，すべての $dx\in I$ について

$$d_{x_0}f(dx)=k\,dx$$

が成立する実数が存在する．この k を f の x_0 における微分係数といって $f'(x_0)$ と記する．通常（ライプニッツの記法に合わせて）$d_{x_0}f$ あるいは単に $d_{x_0}f(dx)$ とか記したのであるから

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx} \tag{‡}$$

であり微分係数は本当に二つの無限小数の比となっているのである[†]．

f が x_0 が微分可能で $f'(x_0)$ がその微分係数であるというのは $\Delta_{x_0}f(dx) \sim f'(x_0)\,dx$ ということと同じであることに注意する．すなわち

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)-f'(x_0)\,dx}{dx}=\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}-f'(x_0)\approx 0$$

がすべての $dx\approx 0$ について成立することであり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

ということである．これはもちろん，通常の意味での微分係数の定義である．

定理 7.4 f が x_0 で微分可能なら，x_0 で連続である．

証明 $\Delta_{x_0}f(dx)=k\,dx$ とする．すなわち

$$f(x_0+dx)-f(x_0)=k\,dx+\alpha\,dx$$

ここに $\alpha\approx 0$ である．したがって $x\approx 0$ ならば $f(x_0+dx)\approx f(x_0)$ である．これは f が x_0 で連続であることを意味している．□

例として $f(x)=x^2$ とすると

$$\Delta_{x_0}f=(x_0+dx)^2-x_0{}^2=2x_0\,dx+dx^2$$

$(dx)^2$ は無限小の段階が dx より高い（$((dx)^2/dx=dx\approx 0)$）ので $\Delta_{x_0}f\sim 2x_0\,dx$ である．よって $df=2x\,dx$，これは $df/dx=2x$ を意味している．

$\Delta_{x_0}f\sim f'(x_0)\,dx$ と同値な条件として

$$f(x_0+dx)-f(x_0)=f'(x_0)\,dx+\alpha\,dx, \qquad \alpha\approx 0$$

すなわち

$$f(x_0+dx)=f(x_0)+f'(x_0)\,dx+\alpha\,dx, \qquad \alpha\approx 0$$

等と書くこともできる．

定理 7.5 f,g が点 x_0 で微分可能とすると fg も微分可能であり

---

† Robinson [14] の取扱い方では，dx は我々が Δf と定義したものになっている．すなわち性質 (‡) は Robinson の取扱い方では一般には成立しないがしかし $f'(x_0)={}^{\circ}(df/dx)$ という意味で成立するのである．

$$d(fg)=f\,dg+g\,df$$

が成立する.

証明
$$f(x_0+dx)=f(x_0)+df+\alpha\,dx,\qquad \alpha\approx 0$$
$$g(x_0+dx)=g(x_0)+dg+\beta\,dx,\qquad \beta\approx 0$$

である. したがって

$$f(x_0+dx)g(x_0+dx)=f(x_0)g(x_0)+f\,dg+g\,df$$
$$+\{df\,dg+\beta f\,dx+\beta\,dfdx+\alpha\beta\,dx^2+\alpha g\,dx+\alpha\,dgdx\}$$

であり括弧の内部は dx より高位の無限小である. このことは $dfdg$ を除いて一つづつ確かめればよい. ところで

$$dfdg=dfg'(x_0)\,dx$$

であるから $df\approx 0$ であることに注意すれば dx より高位の無限小であることがわかる. □

定理 7.6 (**連鎖律** (chain rule)) $k(x)=f(g(x))$ とする. g は x_0 で微分可能, f は $g(x_0)$ で微分可能とすると k は x_0 で微分可能であり

$$dk=f'(g(x_0))\,dg$$

である.

証明 $u_0=g(x_0)$ とすると, ある $\alpha\approx 0$ に対して

$$g(x_0+dx)=u_0+g'(x_0)\,dx+\alpha\,dx$$

となる. そこで $du=g'(x_0)\,dx+\alpha\,dx$ と記すと, ある $\beta\approx 0$ に対して

$$f(g(x_0+dx))=f(u_0+du)=f(u_0)+f'(u_0)\,du+\beta\,du.$$

したがって

$$\varDelta_{x_0}k=f'(g(x_0))g'(x_0)\,dx+\{f'(x_0)\cdot\alpha\,dx+\beta\,du\}$$

となるので所要の結果を得る. □

8. 加 法 性†

この節では雑論的に三つばかり加法性に関係した結果を, 超準解析の応用として述べておく.

まず, 次のような函数の等式を考える:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{‡}$$

この等式を満足する連続函数は, ある $k\in R$ に対して $f(x)=k\cdot x$ となるものに

† この節および次の節は Luxemburg [8.11] に負うところが大きい.

限るというのはコーシーによるやさしい定理である．この結果の多くの拡張が知られているが，ここでは次のような定理の超準解析による証明を与えておく．

定理 8.1（ダルブー[†]の定理） f を R から R への性質 (‡) を満足する函数とする．そして f がある区間 I 上で有界であれば $f(x)=f(0)\cdot x$ である．

証明 まず性質 (‡) から導かれる易しい性質から始める．

(1) $f(0)=0$. これは $f(0)=f(0)+f(0)$ による．

(2) すべての $n\in N$ について $f(nx)=nf(x)$ である．

これは n に関する帰納法による．$n=0$ のときは(1)のものである．n のとき成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} f((n+1)x)&=f(nx+x)=f(nx)+f(x) \\ &=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x). \end{aligned}$$

(3) すべての $x\in R$ について $f(-x)=-f(x)$. これは $f(x)+f(-x)=f(0)=0$ による．

(4) すべての整数 n について $f(nx)=nf(x)$ である．

$n\geq 0$ については(2)により明らかである．$n<0$ であれば

$$\begin{aligned} f(nx)&=f(-(-n)x)=-f((-n)x) \\ &=-(-n)f(x)=nf(x). \end{aligned}$$

(5) すべての有理数 g について $f(gx)=gf(x)$.

n, m を整数 $n\neq 0$ として $g=m/n$ を考える．

$$nf\left(\frac{m}{n}x\right)=f(mx)=mf(x)$$

が成立するから，

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

すべての有理数について，(5)によって，$f(gx)=f(1)\cdot g$ が成立する．したがって，有理数が R の中で調密なことを用いると，連続函数についてはこの式が成立することがただちにわかる．

さて f がある区間 I 上で有界とする．そして x_0 を I の内点とする．そして，すべての $x\in I$ について $|f(x)|\leq M$, $M\in R$ とする．最初に $h\approx 0$ ならば $f(h)\approx 0$ であることから証明しよう．x_0 は I の内点であるから，ある $\delta>0$ に対して

---

†[訳注] J.Darboux (1842-1917) 曲面論，積分論や直交函数展開等に深い着想を得ている．

$$|h|<\delta \quad ならば \quad |f(x_0+h)|\leq M$$

である．移行原理によって，すべての $h\approx 0$ について上式が成立する．

したがってすべての $h\approx 0$ について

$$\begin{aligned}|f(h)|&=|f(x_0+h)-f(x_0)|\\&\leq|f(x_0+h)|+|f(x_0)|\leq M+|f(x_0)|.\end{aligned}$$

さて $h\approx 0$ なら，すべての $n\in N$ について $nk\approx 0$ であるから

$$n|f(h)|=|f(nh)|\leq M+|f(x_0)|$$

すなわち，すべての $n\in N^+$ について

$$|f(h)|\leq\frac{M+|f(x_0)|}{n}$$

これは $f(h)\approx 0$ を意味している．

さて $x\in R$ とすると，定理4.5によってある $g\in{}^*Q$ に対して $x=g+h$, $h\approx 0$ である．よって(移行原理を二度用いて)

$$f(x)=f(g)+f(h)\approx f(g)=gf(1)\approx xf(1)$$

これより $f(x)=xf(1)$ である．□

次の例はポリヤ・セゲーの問題集の中の結果の Luxemberg による一般化である ($p=0$ の場合がポリヤ・セゲーの結果である)．

定理 8.2　実数列 $\{s_n|n\in N^+\}$ について，すべての $n, m\in N^+$ に対して $0\leq p<1$ なる p および $s\in R$ が存在して

$$|s_{n+m}-s_n-s_m|\leq s(n^p+m^p)$$

となるものとする．このときは $\sigma\in R$ が存在して

(1)　$\dfrac{s_n}{n}\to\sigma$

(2)　$|s_n-n\sigma|\leq s\left(\dfrac{n^p}{1-2^{p-1}}\right)$

が成立する．

ここで(1)は(2)よりただちに導かれる．それは $p<1$ から

$$\frac{n^{p-1}}{1-2^{p-1}}\to 0$$

となるからである．

定理の仮定は加法近似とでもいうべきものである．これを繰返して

補題　定理の仮定の下で

$$\left|\frac{s_{2^k n}}{2^k}-s_n\right|\leq sn^p\sum_{i=0}^{k-1}2^{i(p-1)}=sn^p\left(\frac{1-2^{(p-1)k}}{1-2^{p-1}}\right)$$

証明　証明はkに関する帰納法による．仮定より（$m=n$とおいて）

$$|s_{2n}-2s_n|\leq 2sn^p.$$

しかしこれは補題の$k=1$の場合である．そこでkの場合まで成立すると仮定すれば，

$$\left|\frac{s_{2^{k+1}n}}{2^{k+1}}-s_n\right|\leq\left|\frac{s_{2^{k+1}n}}{2^{k+1}}-\frac{s_{2n}}{2}\right|+\left|\frac{s_{2n}}{2}-s_n\right|$$

である．第2項は$k=1$の場合で$\leq sn^p$だから帰納法の仮定より

$$\left|\frac{s_{2^k(2n)}}{2^k}-s_{2n}\right|\leq s(2n)^p\sum_{i=0}^{k-1}2^{i(p-1)}$$

したがって

$$\left|\frac{s_{2^{k+1}n}}{2^{k+1}}-s_n\right|\leq sn^p\left\{1+\sum_{i=0}^{k-1}2^{(i+1)(p-1)}\right\}=sn^p\sum_{i=0}^{k}2^{i(p-1)}\quad\square$$

定理の証明．補題において，$k=\nu\in{}^*N-N$とすれば，

$$\left|\frac{s_{2^\nu n}}{2^\nu}-s_n\right|\leq sn^p\left(\frac{1-2^{(p-1)\nu}}{1-2^{p-1}}\right)\approx\frac{sn^p}{1-2^{p-1}}.\qquad(*)$$

だから$\dfrac{s_{2^\nu n}}{2^\nu}$はすべての$n\in N^+$に対して有限である．$t_n={}^\circ\left(\dfrac{s_{2^\nu n}}{2^\nu}\right)$とおくと，仮定より

$$|s_{2^\nu(n+m)}-s_{2^\nu n}-s_{2^\nu m}|\leq s\cdot 2^{\nu p}(n^p+m^p).$$

したがって

$$\left|\frac{s_{2^\nu(n+m)}}{2^\nu}-\frac{s_{2^\nu n}}{2^\nu}-\frac{s_{2^\nu m}}{2^\nu}\right|\leq s\cdot 2^{\nu(p-1)}(n^p+m^p).$$

$p-1<0$であるから不等式の右辺は無限小である．よって標準部分をとると

$$|t_{n+m}-t_n-t_m|=0$$

である．すなわち$t_{n+m}=t_n+t_m$. しかし（たとえば，定理7.1の証明で見たように）この式より$\sigma={}^\circ\left(\dfrac{s_{2^\nu}}{2^\nu}\right)$とおくと

$$t_n=st_1=n\cdot\sigma.$$

そこで不等式（$*$）を思い出し，標準部分をとると

$$|t_n-s_n|=|n\sigma-s_n|\leq\frac{sn^p}{1-2^{p-1}}$$

となり所要の結果を得る．$\square$

終りの例は，いわゆるバナッハ† 極限の存在の超準解析を用いた証明である．

定義　実数の有界列から R の中への次の条件を有する函数 LIM を**バナッハ極限** (Banach limit) とよぶ：

(1)　$s_n \geq 0$ ならば $\mathrm{LIM}(s_n) \geq 0$

(2)　$\mathrm{LIM}(\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha\,\mathrm{LIM}(s_n) + \beta\,\mathrm{LIM}(t_n)$，ここに $\alpha, \beta \in R$

(3)　$\liminf s_n \leq \mathrm{LIM}(s_n) \leq \limsup (s_n)$

(4)　$\mathrm{LIM}(s_{n+1}) = \mathrm{LIM}(s_n)$

このとき次の定理を証明する：

定理 8.3　バナッハ極限が存在する．

証明　次のような平均値を考えることから始めよう．すなわち

$$a_k = \frac{1}{k}\sum_{n=k}^{2k-1} s_n$$

超準域の方でもこの関係は成立するから $k \in {}^*N^+$ としてよい．k が有限であればある k_0 に対して

$$|a_k| \leq |s_{k_0}| = \max_{k \leq n < 2k} |s_n|$$

が成立するから，移行原理より，この関係は k が無限でも成立する．

もし $\{s_n | n \in N^+\}$ が $|s_n| \leq M$ なる有界列ならば，(移行原理を再び用いて) すべての $n \in {}^*N^+$ に対して s_n は有限である．したがって有界列 $\{s_n\}$ については，すべての $k \in {}^*N^+$ について a_k は有限である．そこで $\nu \in {}^*N - N$ の一つを個定して

$$\mathrm{LIM}(s_n) = {}^\circ(a_\nu)$$

と定める．

さて，性質(1)～(4)を確かめよう．

(1)　すべての $n \in N^+$ について $s_n \geq 0$ ならば，すべての $n \in N^+$ について $a_n \geq 0$ であるから，移行原理によって $a_\nu \geq 0$．それゆえ $\mathrm{LIM}(s_n) \geq 0$ である．

(2)　$u_n = \alpha s_n + \beta t_n$ とおくと，

$$\mathrm{LIM}(u_n) = {}^\circ\!\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1} u_n\right) = {}^\circ\!\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}(\alpha s_n + \beta t_n)\right)$$

$$= {}^\circ\!\left(\alpha\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1} s_n + \beta\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1} t_n\right)$$

---

†[訳注]　S.Banach (1892-1945)　線形作用素の空間 Banach 空間，順序束 Banach 束，連続線形汎函数の拡張に関する Hahn・Banach の定理，Banach 積分等多くの重要な結果や概念を今日にもたらした．

$$=\alpha^{\circ}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}s_n\right)+\beta^{\circ}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}t_n\right)$$
$$=\alpha\,\mathrm{LIM}(s_n)+\beta\,\mathrm{LIM}(t_n)$$

（3） $\varepsilon>0$ を正実数とする．すると（定理5.3より）すべての $n\in{}^*N-N$ について ${}^{\circ}(s_n)$ は $\{s_n|n\in N^+\}$ の極限点の一つである．したがって

$$\liminf_{n\to\infty}\{s_n\}\leq{}^{\circ}(s_n)\leq\limsup_{n\to\infty}\{s_n\},$$

これより

$$\liminf_{n\to\infty}\{s_n\}-\varepsilon\leq s_n\leq\limsup_{n\to\infty}\{s_n\}+\varepsilon.$$

この関係が $\nu\leq n<2\nu$ となる n について成立するのであるから

$$\liminf_{n\to\infty}\{s_n\}-\varepsilon\leq\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}s_n\leq\limsup_{n\to\infty}\{s_n\}+\varepsilon$$

となる．そこで標準部分をとると

$$\liminf_{n\to\infty}\{s_n\}-\varepsilon\leq\mathrm{MIM}(s_n)\leq\lim\sup\{s_n\}+\varepsilon.$$

ここで $\varepsilon\to0$ とすればよい．

（4） $u_n=s_{n+1}$ とおくと

$$\mathrm{LIM}(u_n)={}^{\circ}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}s_{n+1}\right)$$
$$={}^{\circ}\left(\frac{1}{\nu}\left(\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}s_n-s_{2\nu}+s_\nu\right)\right)$$
$$={}^{\circ}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{n=\nu}^{2\nu-1}s_n\right)-{}^{\circ}\left(\frac{s_{2\nu}}{\nu}\right)+{}^{\circ}\left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)$$
$$=\mathrm{LIM}(s_n)-0+0=\mathrm{LIM}(s_n).\qquad\square$$

9. 非可測集合の存在

この節では超準解析の応用としてはあまり標準的ではなくて奇妙なのだけれど，実数の有界集合でルベーグ† 非可測な集合の存在を示す．

ここでは（この節だけでは）読者はルベーグ測度とか積分について心得ているものとする．

例によって f は R から R への函数とする． f が**周期**(period) p を有すると

---

†[訳注] H.Lebesgue (1875-1941) Lebesgue 積分の創始者，積分論，級数論，位相幾何学等に多くの深い結果をもたらした．

はすべての $x \in R$ について

$$f(x+p)=f(x)$$

となることをいう．有界で周期 p を有する可測函数については，すべての $x, y \in R$ について

$$\int_x^{x+p} f(t)\,dt=\int_y^{y+p} f(t)\,dt$$

が成立することに注意しておく．

我々は次の定理を用いる．

定理 9.1 f を R 上の有界な可測函数で任意に小さな周期を有するとすれば，f はほとんど到るところ (a.e.) 定数である．

証明 ルベーグ積分に関する基本定理によれば，すべての $x, y \in R$ について

$$f(x)\underset{\text{a.e.}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_y^{y+h} f(t)\,dt\underset{\text{a.e.}}{=}f(y)$$

ここに h は f の周期に制限したときの極限である (仮定によってそのような極限がある．したがって $f(x)\underset{\text{a.e.}}{=}f(y)$ である．すなわち $f(x)$ はほとんど到るところ定数である)．

定義 2 進有理数 (binary rational) とは a_k を 0, 1 として

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$$

と表現できる数のこととする．2 進有理数の全体の集合を B とおく．もちろんすべての 2 進有理数は $0 \leq r < 1$ となる有理数である．

$0 \leq x < 1$ なる実数 x に対して $s_x(n)$ で x の 2 進展開の第 n 桁とする．すなわち

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_x(n)}{2^n}$$

ここに $s_x(n)$ は 0 または 1 である (2 進有理数 r に対しては，このような表現では $s_r(n)$ は一意的には定まらない．この任意性を除くために，あるところから先すべて $s_r(n)=0$ となる場合は除いておく)．各 x について s_x は N^+ から $\{0, 1\}$ への函数である．だから $^*(s_x)$ は $^*N^+$ から $\{0, 1\}$ への函数である ($\{0, 1\}$ は有限であるから $^*\{0, 1\}=\{0, 1\}$)．例によって s_x で $^*(s_x)$ のことを記す．

$\nu \in {}^*N-N$ を一つ固定し，A を $0 \leq x < 1$ なる x で $s_x(\nu)=1$ となる x の全体とする．我々が示そうとしているのは，この A がルベーグ非可測ということである．したがって A がルベーグ可測で

$$0 \leq m(A) \leq 1$$

となる $m(A)$ をその測度にもつと仮定して，矛盾を導こうというのである．

各々の実数 x は整数 m と $0 \leq y < 1$ なる実数を用いて $x = m + y$ の形に一意的に書くことができる．そこで

$$f(x) = \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & y \notin A \end{cases}$$

とおく．A が可測であると仮定したので f は R 上の有界な可測函数である．

補題 1．$r \in B$ のとき，すべての $x \in R$ に対して $f(x+r) = f(x)$ である．

証明　$r \neq 0$ と仮定してよい．

場合 1　$0 \leq x$，$x + r < 1$

証明すべきことは $x \in A$ と $x + r \in A$ が同値であること，すなわち $s_x(\nu) = s_{x+r}(\nu)$ となることである．これを示すために，ある自然数 m をとって

$$\models (\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}^+)(\mathbf{n} \geq \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{s}_{x+r}(\mathbf{n}) = \mathbf{s}_x(\mathbf{n}))$$

とできる．それは x に r を加えても x の 2 進展開の有限個の桁しか変化しないからである．移行原理を用いると

$$s_{x+r}(\nu) = s_x(\nu)$$

が得られる．

場合 2　$m \leq x$，$x + r < m + 1$，ここに m は整数．

$x' = x - m$ とおくと $0 \leq x'$，$x' + r < 1$ であるから場合 1 を用いて

$$f(x+r) = f(x'+r) = f(x') = f(x).$$

場合 3　$x < m \leq x + r$，ここに m は整数．

$x' = x - m + r$ とおくと $0 \leq x' = x - m + r \leq r < 1$ であり

$$0 \leq x' < x' + (1-r) = (x - m + r) + (1 - r) = x - (m-1) < m - (m-1) = 1$$

であるから

$$0 \leq x',\ x' + (1-r) < 1$$

となる．もちろん $1 - r \in B$ であるから場合 1 によって

$$f(x+r) = f(x') = f(x' + (1-r)) = f(x' - r) = f(x - m) = f(x)$$

を得る．□

B は任意に小さい元を含むから，定理 8.1 から f はほとんど到るところ定数であることがわかる．したがって

補題 2．$m(A) = 0$ または $m(A) = 1$．

補題 3. $0<x<1$ かつ $x \notin B$ ならば，すべての $n \in N^+$ について

$$s_{1-x}(n)=1-s_x(n).$$

証明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_x(n)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-s_x(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-s_x(n)}{2^n}=1-x \quad \square$$

補題 3 と移行原理を用いると $x \notin B$ ならば $s_{1-x}(\nu)=1-s_x(\nu)$ である．したがって $x \in A-B$ と $1-x \in \bar{A}-B$ は同値である．ここに $\bar{A}=\{x \in R \mid 0<x<1,\ x \notin A\}$.

変換 $x \to 1-x$ はユークリッド (Euclid (330?-275? B.C.) 運動 (すなわち $x=1/2$ に関する反射) であるから測度を保つ．すなわち

$$m(A-B)=m(\bar{A}-B)$$

しかし B は可算であるから測度 0 である．したがって

$$m(\bar{A}-B)=m(\bar{A})$$

そして

$$m(A-B)=m(A)$$

である．したがって

$$m(A)=m(\bar{A})=\frac{1}{2}$$

を得る．これは補題 2 に反する． □

演習問題

1. $x \in {}^*R-R$ で $x \notin {}^*Q$ となるものが存在することを示せ．

2. 超実数 x についても，定理 4.5 が成立することを示せ．

3. (a) 実数列 $\{s_n \mid n \in N^+\}$ が有界であるのは，すべての無限の n に対して s_n が有限のときに限ることを示せ．

(b) すべての有界実数列が極限点を有することを定理 5.3 を用いて示せ．

4. (a) f を $[a, b]$ から R への函数とする ($a<b$)

$$r=\{\langle x, y\rangle \mid a \leq x,\ y \leq b,\ f(x) \leq f(y)\}$$

については r は共起的であることを示せ．

(b) (a) を用いて定理 5.6 の別証明を与えよ．

5. 超準解析を用いて $s_n \to L$ ならば

$$\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} \to L$$

の別証明を与えよ．（ヒント：一般性を失うことなしに $L=0$, $s_n \geq 0$ としてよい．$\nu \in {}^*N-N$ に対して

$$s_1+s_2+\cdots+s_\nu=(s_1+\cdots+s_\mu)+(s_{\mu+1}+\cdots+s_\nu)$$

ここに $\mu/\nu \approx 0$ となるようにしてみよ）

6. $x \in {}^*R$ に対して $\{y \in {}^*R \mid y \approx x\}$ は外的であることを示せ．

3 位相および距離空間

1. 位相空間

超準解析を用いた位相空間の取扱いをどのように進めるべきかを考えるため，超実数と関係して見てきた実数の位相について，もう一度たどってみることにする．極限とか連続性等の位相的概念は組織的に $x_0 \in R$, $x \in {}^*R$ に関する関係 $x \approx x_0$ に帰してきたのであった．このことから考えて，各々の x_0 は，$h \approx 0$ について $x = x_0 + h$ となる点の全体である“無限小近傍”に入るのだと考えることを意味している．この集合を $\mu(x_0)$ と記して，(ライプニッツにしたがって) x_0 の**単子**(monad)とよぶ．すなわち

$$\mu(x_0) = \{x_0 + h \mid h \approx 0\}$$

このような概念がより抽象的な状況の下でどのように一般化されるかを見るために，$r \in R^+$ に対して

$$I_r = \{x \in R \mid x_0 - r < x < x_0 + r\}$$

とおくと

$$\mu(x_0) = \bigcap_{r \in R^+} {}^*I_r$$

となっていることに注意しよう．これにならって一般の場合を取扱ってみよう．

定義　**位相空間**(topological space)とは，集合Xとその集合族$\mathcal{O}\subseteq P(X)$の組で次の条件を満足するものをいう．

(1)　$\phi, X\in\mathcal{O}$,

(2)　$G_1, \cdots, G_n\in\mathcal{O}$ ならば $G_1\cap\cdots\cap G_n\in\mathcal{O}$,

(3)　すべての $j\in J$ について $G_j\in\mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{j\in J}G_j\in\mathcal{O}$.

集合族$\mathcal{O}$の元はXの**開集合**(open set)とよばれる．

超準的手法を用いるために $X\in U$ (今まで $X\subseteq S$ も仮定していなかった)とする．このときはXの部分集合はすべてUに属し，$\mathcal{O}$についてもUに属することがわかる．

各々の点 $p\in X$ に対して

$$\mathcal{O}_p=\{G\in\mathcal{O}\,|\,p\in G\}$$

と記し，$\mathcal{O}_p$ の元を点 p の**開近傍**(open neighbourhood)とよぶ．

定義
$$\mu(p)=\bigcap\{{}^*G\,|\,G\in\mathcal{O}_p\}$$
そして $\mu(p)$ を p の**単子**(monad)とよぶ．$q\in\mu(p)$ のことを $q\approx p$ と記する．

関係 $q\approx p$ は，$q\in{}^*X$ かつ $p\in X$ に対してのみ成立することに注意しておく．特に通常は対称的でもないのである．

${}^*R$ での例が示す通り，単子は必ずしも内集合ではない．しかしすべての単子はあたかも開近傍のように振舞う内集合を含んでいる．それは，

定理 1.1　すべての $p\in X$ に対して，内集合 $D\in{}^*\mathcal{O}_p$ があって $D\subseteq\mu(p)$ が成立する．

証明
$$r=\{\langle x, y\rangle\,|\,x, y\in\mathcal{O}_p, y\subseteq x\}$$
とおくと，r が共起的であることを示す．明らかに dom $r=\mathcal{O}_p$ である．共起性を示すため　$A_1, \cdots, A_n\in\mathcal{O}_p$　とすると　$B=A_1\cap\cdots\cap A_n\in\mathcal{O}_p$　であるから $i=1, \cdots, n$ について $\langle A_i, B\rangle\in r$ である．よって r は共起的である．

共起性定理より，　$D\in{}^*U$ なるDが存在して，　すべての $A\in\mathcal{O}_p$ に対して $\langle{}^*A, D\rangle\in{}^*r$ となる．また

$$\models(\forall \mathbf{x}\in\mathcal{O}_p)(\forall \mathbf{y}\in\mathcal{O}_p)(\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\in\mathbf{r}\rightarrow\mathbf{y}\subseteq\mathbf{x})$$

である．${}^*r\subseteq{}^*\mathcal{O}_p\times{}^*\mathcal{O}_p$ であったから移行原理より

$$D\subseteq\bigcap\{A^*\,|\,A\in\mathcal{O}_p\}=\mu(p)$$

となる．□

位相空間Xについて，異なる二点が常に互いに素な開近傍を有するとき，Xは**ハウスドルフ†空間**(Hausdorff space または T_2-space)とよばれている.

定理 1.2 Xがハウスドルフ空間であるための必要十分な条件は，$p \neq q$ ならば $\mu(p) \cap \mu(q) = \phi$ となることである.

証明 Xをハウスドルフ空間とし，$p \neq q$ とする．仮定より $G \in \mathcal{O}_p$，$H \in \mathcal{O}_q$ が存在して $G \cap H = \phi$ である．したがって単子の定義より $\mu(p) \subseteq {}^*G$ かつ $\mu(q) \subseteq {}^*H$ である. 定理1-7.8(または移行原理)によって ${}^*G \cap {}^*H = \phi$ であるから $\mu(p) \cap \mu(q) = \phi$ となる.

逆に，Xをハウスドルフ空間でないとすると，$p, q \in X$，$p \neq q$ なる点で

$$\models (\forall \mathbf{G} \in \mathcal{O}_p)(\forall \mathbf{H} \in \mathcal{O}_q)(\exists \mathbf{x} \in \mathbf{G})(\mathbf{x} \in \mathbf{H})$$

となるものが存在する．前定理によると $D_1 \subseteq {}^*\mathcal{O}_p$ および $D_2 \subseteq {}^*\mathcal{O}_q$ で

$$D_1 \subseteq \mu(p) \quad \text{かつ} \quad D_2 \subseteq \mu(q)$$

となるものが存在する. 移行原理より $x \in D_1 \cap D_2$ となる x が存在する. これは $\mu(p) \cap \mu(q) \neq \phi$ を意味している． □

次に色々の位相の概念に同値な超準解析での性質について述べておく.

定理 1.3 Gが開集合となることとすべての $p \in G$ に対して $\mu(p) \subseteq {}^*G$ となることは同値である.

証明 Gを開集合とし $p \in G$ とする．$G \in \mathcal{O}_p$ であるから

$$\mu(p) = \bigcap \{{}^*A \mid A \in \mathcal{O}_p\}$$

によって $\mu(p) \subseteq {}^*G$ である.

さて $p \in G$ に対して $\mu(p) \subseteq {}^*G$ とする．このときは内集合 $D \in {}^*\mathcal{O}_p$ で

$$D \subseteq \mu(p) \subseteq {}^*G$$

となるものがある．すなわち

$$* \models (\exists \mathbf{D} \in {}^*\mathcal{O}_p)(\mathbf{D} \subseteq {}^*\mathbf{G})$$

よって，移行原理より

$$\models (\exists \mathbf{D} \in \mathcal{O}_p)(\mathbf{D} \subseteq \mathbf{G}).$$

これはpの近傍 A_p で $A_p \subseteq G$ となるものが存在することを意味している．したがって $p \in G$ ならば $\mu(p) \subseteq {}^*G$ となっていれば $A_p \subseteq G$ となる p の近傍があることになる．これより $G = \bigcup_{p \in G} A_p$ は開集合である． □

---

†[訳注] F. Hausdorff (1868-1942) 位相空間を開集合系で導入した．それに対して C. Kuratowski (1896- ?) は閉集合系で位相を導入した.

別な表現をすると

系 1.4　Gが開集合ということと，すべての $p \in G$ に対して

$$q \approx p \text{ ならば } q \in {}^*G$$

ということは同値である．

定理1.3の重要な一つの結論は単子によって位相が定まるということである．というのは単子によって開集合が決まり，したがって位相が定まるということである．このことからすべての位相的性質は単子なる用語を用いて定義できるということである．

Fが**閉集合**(closed)であるというのは$X-F$が開集合ということであった．すなわちFが閉集合ということと，すべての $p \in X-F$ に対して

$$q \approx p \text{ ならば } q \in {}^*(X-F)$$

ということと同値である．${}^*(X-F)={}^*X-{}^*F$(定理1-7.8)であったから，この条件は

$$p \in X,\ q \approx p,\ q \in {}^*F \text{ ならば } p \in F$$

と同値である．

したがって証明されたことは

系 1.5　Fが閉集合ということと，すべての $p \in X$ に対して

$$p \in {}^*F,\ q \approx p \quad \text{ならば} \quad p \in F$$

ということは同値である．

定義　Xを位相空間とするとき，点 $p \in {}^*X$ が**近準点**†(near standard)とは，ある $q \in X$ に対して $p \approx q$ ということをいう．そうでないとき p は**遠準点**(remote)であるという．

Xの部分集合Kが**コンパクト**(compact)とは，K の任意の被覆が有限部分被覆を有することをいう．(すなわち $K \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{M}} A$, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{O}$ ならば $K \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_k$ となる $A_1, \cdots, A_k \in \mathscr{M}$ が存在すること)

超準解析でのコンパクト性の条件は特に有用である．

定理 1.6　Kがコンパクトであることと，すべての $p \in {}^*K$ に対してある $q \in K$ が存在して $p \approx q$ となることは同値である．

これからただちに導かれることであるが，

系 1.7　Xがコンパクトであることと，すべての $q \in X$ は近準点であること

---

†[訳注]　近標準点と訳すべきか？

は同値である.

定理の証明 Kをコンパクト集合とする. ある $p\in{}^*K$ に対してすべての $q\in K$ について $p\notin\mu(q)$ と仮定する. これはすべての $q\in K$ に対して $p\notin\bigcap\{{}^*G\mid G\in\mathcal{O}_q\}$ を意味している. したがって, すべての $q\in K$ に対してある $G_q\in\mathcal{O}_q$ が存在して $p\notin{}^*G_q$ を意味している. すべての $q\in K$ に対して $q\in G_q$ であるから

$$K\subseteq\bigcup_{q\in K}G_q$$

である. Kのコンパクト性を用いると $q_1, \cdots, q_l\in K$ が存在して

$$K\subseteq G_{q_1}\cup G_{q_2}\cup\cdots\cup G_{q_l}$$

となる. すなわち

$$\models(\forall\mathbf{x}\in\mathbf{K})(\mathbf{x}\in\mathbf{G}_{q_1}\vee\cdots\vee\mathbf{x}\in\mathbf{G}_{q_l})$$

が成立する. 移行原理を用い, $p\in{}^*K$ であることに注意すると p は ${}^*G_{q_1}, \cdots, {}^*G_{q_l}$ のどれかに入ることになるが, これは $p\in{}^*G_q$ に反する.

逆に, すべての $p\in{}^*K$ に対しある $g\in K$ が存在して $p\approx g$ であって, K がコンパクトでないと仮定する. このときは K の開被覆 $\mathscr{G}$ でそれを K の有限被覆にできないものがある. そこで

$$r=\{\langle X, y\rangle\mid X\in\mathscr{G},\ \ y\in K,\ \ y\notin X\}$$

を考える. そしてこの r が共起的であることを示す. まず $G\in\mathscr{G}$ とすると, ある $p\in K$ に対して $\langle G, p\rangle\in r$ であることに注意しよう (そうでなければ $\{G\}$ 自体 $\mathscr{G}$ の有限部分集合で K の被覆である). したがって $\mathrm{dom}(r)=\mathscr{G}$ である. 次に, $G_1, \cdots, G_m\in\mathscr{G}$ とする $\{G_1, \cdots, G_m\}$ は K を覆うことはないから, ある $p\in K$ に対して $p\notin G_1\cup\cdots\cup G_m$ である. すなわち

$$\langle G_i, p\rangle\in r \qquad ここに\ i=1, 2, \cdots, m.$$

したがって r は共起的である.

共起性定理を用いると, $p\in{}^*U$ が存在して, すべての $G\in\mathscr{G}$ に対して $\langle G, p\rangle\in{}^*r$ となる. ${}^*r\subseteq{}^*\mathscr{G}\times{}^*K$ であるから $p\in{}^*K$ でもある. さて, すべての $G\in\mathscr{G}$ について

$$\models(\forall\mathbf{x}\in\mathbf{K})(\langle\mathbf{G}, \mathbf{x}\rangle\in\mathbf{r}\rightarrow\neg(\mathbf{x}\in\mathbf{G}))$$

であるから, 移行原理によって, すべての $G\in\mathscr{G}$ について $p\notin{}^*G$ である. 仮定によると $p\approx g$ となる $g\in K$ が存在する. $\mathscr{G}$ は K の開被覆であり $g\in K$ であるから, ある $G\in\mathscr{G}$ に対して $g\in G$ である. $\mu(g)$ は $G\in\mathcal{O}_g$ に応ずる ${}^*G$ のす

べての共通部分であったから

$$p \in \mu(g) \subseteq {}^*G$$

である．したがって $p \in {}^*G$ と $p \notin {}^*G$ の両方を得ることになり矛盾である．□

この節の終りに二つの基礎的定理の超準解析での証明を与えておこう．

定理 1.8 コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトである．

証明 K をコンパクト集合，$F \subseteq K$ を閉集合とする．$p \in {}^*F$ とすると $p \in {}^*K$ である．K がコンパクトであったから $p \approx g$ となる $g \in K$ がある．しかし F は閉集合であったから $g \in F$ である．定理1.6により F はコンパクトである．□

定理 1.9 ハウスドルフの空間のコンパクト集合は閉集合である．

証明 K をコンパクト集合とする．$g \in {}^*K$ とし $g \in \mu(p)$ とする．証明すべきことは $p \in K$ である．K はコンパクトであるから $g \in \mu(r)$ となる $r \in K$ が存在する．ハウスドルフ空間では $g \in \mu(p) \cap \mu(r)$ より $p = r$ である．□

2. 写像と積

ここでは二つ以上の位相空間が関係するような場合を考えよう．このような場合には $\mu(p)$ というような記法は曖昧なものではあるが，前後の関係から誤解なく理解できるものである．

f を位相空間 X から位相空間 Y への写像とする．f が点 p で**連続** (continuous at p) とは，$f(p)$ の任意の近傍 $G \subseteq Y$ に対して p の近傍 $H \subseteq X$ が存在して

$$f[H] \subseteq G$$

となることをいう．

もちろん，連続性について超準解析の立場から論じようとするならば $X, Y \in U$ と仮定しておかねばならない．($X, Y \subseteq S$ でないと ${}^*f$ が f の拡張ということも仮定できない．もちろん ${}^*f$ は ${}^*X$ から ${}^*Y$ への写像である)

定理 2.1 X, Y を位相空間，f を X から Y への写像とする．このとき，f が点 p で連続ということと，

$$g \approx p \quad ならば \quad {}^*f(g) \approx f(p)$$

なることは同値である．

この終りの条件は次の同値な条件：

$$g \in \mu(p) \quad ならば \quad {}^*f(g) \in \mu(f(p))$$

とも，また，単に

$$^*f[\mu(p)]\subseteq\mu(f(p))$$

と記してもよい．

証明　f が点 p で連続と仮定する．G を $f(p)$ の任意の近傍とすると，ある $H\in\mathscr{O}_p$ に対して $f[H]\subseteq G$ である．定理1-7.11 および 1-7.13 によって $^*f[^*H]\subseteq{}^*G$，$\mu(p)\subseteq{}^*H$ であるから

$$^*f[\mu(p)]\subseteq{}^*f[^*H]\subseteq{}^*G.$$

したがって

$$^*f[\mu(p)]\subseteq\bigcap\{^*G\mid G\in\mathscr{O}_{f(p)}\}=\mu(f(p))$$

逆方向のためには，定理 1.1 によって，ある内集合 $D\in{}^*\mathscr{O}_p$ に対して $D\subseteq\mu(p)$ となることを用いる．仮定より $g\in D$ ならば $^*f(g)\in\mu(f(p))$ である．それゆえ H を $f(p)$ の任意の開近傍とすると $g\in D$ ならば $^*f(g)\in{}^*H$ である．これより任意の $H\in\mathscr{O}_{f(p)}$ に対して

$$*\models(\exists\mathbf{D}\in{}^*\mathscr{O}_p)(\forall\mathbf{x}\in\mathbf{D})(^*\mathbf{f}(\mathbf{x})\in{}^*\mathbf{H})$$

である．移行原理を用いると，ある p の近傍 D に対して $f[D]\subseteq H$ となる．すなわち f は点 p で連続である．□

この定理の簡単な応用として，次の基礎的定理の超準解析による証明を与えておく．

系 2.2　f を K 上のすべての点で連続とする．K がコンパクトであれば $f[K]$ もコンパクトである．

証明　$g\in{}^*(f[K])$ とする．定理1-7.13 によると $^*(f[K])={}^*f[^*K]$ であるから，$g={}^*f(r)$ となる $r\in{}^*K$ が存在する．K はコンパクトであるから $r\approx r_0$ となる $r_0\in K$ が存在する．定理2.1 によって

$$g={}^*f(r)\approx f(r_0)\in f[K]$$

となる．したがって定理1.6 によって $f[K]$ はコンパクトである．□

次に位相空間のカルテシアン積† について取扱いたいわけてあるが，そのために $\mathscr{O}$ は位相空間 X の開集合の族であったことを思い出しておこう．このとき $\mathscr{G}$ は次の(1)，(2)が満足されるとき X の**基** (basis) であるという．すなわち

(1)　$\mathscr{G}\subseteq\mathscr{O}$

†[訳注]　R.Descartes (1596-1650)　図形の性質が数の組によって記述できることを指適した．座標の概念はベッドの上を飛んでいる虫を見て，その位置が 3 方の壁からの距離の組で表わされることに気付いたという．著書に「方法序説」等がある．

（2） すべての $G\in\mathscr{O}$ に対して，$\{G_i\,|\,i\in J\}$ で $G_i\in\mathscr{G}$ となるもので

$$G=\bigcup_{i\in J}G_i.$$

$\mathscr{G}$ が X の基であって $p\in X$ のとき，

$$\mathscr{G}_p=\mathscr{G}\bigcap\mathscr{O}_p$$

すなわち

$$\mathscr{G}_p=\{G\in\mathscr{G}\,|\,p\in G\}$$

と記する．

定理 2.3 $\mathscr{G}$ を X の基とすれば，各 $p\in X$ について

$$\mu(p)=\bigcap_{G\in\mathscr{G}_p}{}^*G.$$

証明

$$\mu(p)=\bigcap_{G\in\mathscr{O}_p}{}^*G\subseteq\bigcap_{G\in\mathscr{G}_p}{}^*G.$$

逆に，$H\in\mathscr{O}_p$ とすると $G_H\in\mathscr{G}_p$ で $G_H\subseteq H$ となるものが存在する．(これは H が $\mathscr{G}$ の元の和であるから，少なくとも一つは p を含むのである) これより

$$\bigcap_{G\in\mathscr{O}_p}{}^*G\subseteq\bigcap_{H\in\mathscr{O}_p}{}^*G_H\subseteq\bigcap_{H\in\mathscr{O}_p}{}^*H=\mu(p)$$

を得る． □

さて，次のような積を考えよう．

$$X=\prod_{i\in J}X_i=\{f\,|\,\text{すべての } i\in J \text{ について } f(i)\in X_i\}$$

ここに $\{X_i\,|\,i\in J\}\in U$ と仮定する．もしすべての X_i が位相空間であれば，X 上の**積位相** (product topology) は通常の通り，次のような形の集合

$$A=\{f\,|\,f(\nu_i)\in G_i,\ i=1,2,\ \cdots,\ l\}$$

ここに $G_1,\cdots,G_l$ は各々 $X_{\nu_1},\cdots,X_{\nu_l}$ の開集合，を基として一意的に特徴づけられる．

超準解析の見地からは積位相のもっと直観的特徴づけが得られる．

定理 2.4 $X=\prod_{i\in J}X_i$ とする．$g\in{}^*X$，$f\in X$ とするとき，$g\approx f$ が成立することと，すべての $i\in J$ について $g(i)\approx f(i)$ であることは同値である．

証明 ここでは $\mathscr{G}$ は上述の X の開集合の基とする．$g\approx f$ として，例えば $j_0\in J$ に対して $g(j_0)\not\approx f(j_0)$ と仮定する．このときは $g(j_0)\notin\mu(f(j_0))$ であり，単子の定義より，ある $G\in\mathscr{O}_{f(j_0)}$ に対して $g(j_0)\notin{}^*G$ である．

$$W=\{h\in X\,|\,h(j_0)\in G\}$$

とすると W は開集合である．(事実 $W\in\mathscr{G}$) さて

$$\models(\forall \mathbf{t}\in\mathbf{X})(\mathbf{t}\in\mathbf{W}\rightarrow(\mathbf{t}\upharpoonright\mathbf{j}_0)\in\mathbf{G})$$

であるから，移行原理によって

$$*\models(\forall t\in {}^*X)(t\in {}^*W\to(t\upharpoonright j_0)\in {}^*G)$$

となる．$g\in{}^*X$ かつ $g(j_0)=g\upharpoonright j_0\notin{}^*G$ であるから $g\notin{}^*W$ ではなくてはならない．他方 $f\in W$ であるから，$W\in\mathcal{O}_f$ である．よって $\mu(f)$ の定義より

$$g\notin\mu(f)$$

である．すなわち $g\not\approx f$ を得る．

逆に，すべての $i\in J$ に対して $g(i)\approx f(i)$ と仮定する．$G\in\mathcal{G}_f$ とすれば，

$$G=\{h\,|\,h(\nu_i)\in G_i,\quad i=1,2,\cdots,l\}$$

ここに G_i は X_{ν_i} の開集合 の形に記すことができる．$f\in G$ であるから $f(\nu_i)\in G_i$, $i=1,\cdots,l$ である．仮定より $g(\nu_i)\approx f(\nu_i)$ であるから G_i が開集合であることより $g(\nu_i)\in{}^*G_i$ である．これより移行原理を用いると $g\in{}^*G$ である．したがって定理2.3を用いると

$$g\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}_f}{}^*G=\mu(f)$$

すなわち $g\approx f$ である．□

定理 2.5　ハウスドルフ空間の直積はハウスドルフ空間である．

証明　すべての $i\in J$ について X_i はハウスドルフ空間とし，$X=\prod_{i\in J}X_i$ とする．そして $f,g\in X$ で $f\neq g$ とする．証明すべきことは $\mu(f)\cap\mu(g)=\phi$ である．これが成立しないとすると $h\in\mu(f)\cap\mu(g)$ すなわちすべての $i\in J$ について $h(i)\approx f(i)$, $h(i)\approx g(i)$ となる h が存在する．しかしすべての $i\in J$ について X_i はハウスドルフ空間であるから $f(i)=g(i)$ である．これは $f=g$ を意味している．□

定理 2.6（**チコノフ**[†] **の定理**）　すべての $i\in J$ について X_i がコンパクトならば，$\prod_{j\in J}X_i$ もコンパクトである．

証明　$X=\prod_{j\in J}X_i$ とする．$g\in{}^*X$ に対して $g\approx f$ となる $f\in X$ が存在することを示せばよい．$g\in{}^*X$ であるから移行原理により，すべての $i\in J$ に対して $g(i)\in{}^*X_i$ である．各 X_i はコンパクトであるから $g(i)\approx a_i$ となる $a_i\in X_i$ が存在する．すなわちすべての $i\in J$ について $f(i)=a_i$ とすると $f\in X$ であり $g(i)\approx f(i)$ である．定理2.4によって $g\approx f$ を得る．□

技術的なポイント：もし X_i がすべてハウスドルフ空間であれば a_i は一意

---

† A. Tychonoff (1906-？)　コンパクト空間の任意個（無限）の直積空間はコンパクトという定理でも有名，これは選択公理，Zorn の補題とも同値である．

的に決定されるので，この証明では選択公理は用いられていない．そうでない場合は選択公理を用いなくてはならない．もちろん弱い形の選択公理は我々の展開法ではすでに用いられている．

3．位 相 群

集合 G が**位相群** (topological group) であるとは，次の条件(1)～(3)を満足することをいう．

（1） G は位相空間である．すなわち G の部分集合の族 $\mathcal{O}$ は G の開集合の条件を満足する．

（2） G は算法・，単位元 e，$x\in G$ の x^{-1} と記される逆元に関して群 (group) をなす．(例によって $x\cdot y$ の代りに xy と記す)

（3） 算法 $x\cdot y$ および x^{-1} は $\mathcal{O}$ によって定まる位相について連続である．

我々は $G\subseteq S$ と仮定する．そうすると $\mathcal{O}$ とか積・およびその逆函数 $^{-1}$ 等は標準域 U に属する．

前に記した議論によって(3)の連続性の条件は次のように記すことができる．

(3a) $x_0, y_0\in G$, $x, y\in {}^*G$, $x\approx x_0, y\approx y_0$ ならば $x\cdot y\approx x_0\cdot y_0$

(3b) $x_0\in G$, $x\in {}^*G$, $x\approx x_0$ ならば $x^{-1}\approx x_0{}^{-1}$

G は群であるから

$$(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{G})(\forall \mathbf{y}\in \mathbf{G})(\forall \mathbf{z}\in \mathbf{G})((\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\cdot\mathbf{z})\,\&\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x})\,\&\,(\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{e}))$$

が成立する．移行原理によると，${}^*G$ も同様に一つの群であり，$G\subseteq S$ と仮定したわけであるから $G\subseteq {}^*G$ である．すなわち G は ${}^*G$ の部分群である．

J を ${}^*G$ の近準点の全体の集合とする．すなわち

$$J=\{x\in {}^*G\,|\,x\approx x_0 \text{ となる } x_0\in G \text{ が存在する}\}.$$

定理 3.1 J は ${}^*G$ の部分群である．

証明 $x, y\in J$ とする．証明すべきことは $x\cdot y\in J$ および $x^{-1}\in J$ である．そこで，$x\approx x_0$，$y\approx y_0$ かつ $x_0, y_0\in G$ とすると (3a)，(3b) によって

$$x\cdot y\approx x_0\cdot y_0\in G, \qquad x^{-1}\approx x_0{}^{-1}\in G$$

である．したがって $x\cdot y\in J$ および $x^{-1}\in J$ である．□

定理 3.2 $\mu(e)$ は J の正規部分群である．

証明 $e\in G$ であるから明らかに $\mu(e)\subseteq J$ である．$x, y\in \mu(e)$ とすると，$x\approx e$ かつ $y\approx e$ である．したがって $x\cdot y\approx e\cdot e=e$．また $x^{-1}\approx e^{-1}=e$ である

から $\mu(e)$ は J の部分群である.

次に $y\in J$, $x\in\mu(e)$ に対して $y^{-1}xy\in\mu(e)$ を示す. $y\approx y_0\in G$ とすると $x\approx e$ であるから

$$y^{-1}xy\approx y_0{}^{-1}ey_0=e \quad \square$$

$A, B\subseteq {}^*G$ で $x\in {}^*G$ とするとき, 例によって

$$xA=\{xy\,|\,y\in A\}$$
$$AB=\{xy\,|\,x\in A \text{ かつ } y\in B\}$$

等と定める.

定理 3.3　$x\in G$ に対して

$$\mu(x)=x\mu(e)=\mu(e)x.$$

証明　$t\in x\mu(e)$, すなわちある y について $t=xy$ かつ $y\approx e$ と仮定する. $t=xy\approx xe=x$ より $t\in\mu(x)$ である. 逆に $t\in\mu(x)$ なら $t\approx x$ であるから, $x^{-1}t\approx x^{-1}x=e$, したがって $x^{-1}t\in\mu(e)$. よって $t=x(x^{-1}t)\in x\mu(e)$. これは $\mu(x)=x\mu(e)$ を示している. $\mu(x)=\mu(e)x$ も同様に示される. さて, $\mu(e)$ は J の正規部分群であるから左剰余類 (coset) $x\mu(e)$ と右剰余類 $\mu(e)x$ は同一のものである. □

補題 1.　$x\approx y\in G$ ならば $y\mu(e)=x\mu(e)=\mu(x)$.

証明　$y=ye$ であるから $y\in y\mu(e)$, 同様にして $y\in x\mu(e)=\mu(x)$ である. しかし, 二つの剰余類が共通部分が空でないとき, 同一のものである. □

すなわち $\mu(e)$ による J での剰余類は正しく $x\in G$ に応ずる単子 $\mu(x)$ である.

補題 2.　$x, y\in G$ ならば $\mu(xy)=\mu(x)\mu(y)$.

証明　$z\in\mu(xy)=xy\mu(e)$ とすると, $z=xyt$, $t\approx e$ となる t が存在する. しかし $x\in\mu(x)$ であり $yt\in y\mu(e)=\mu(y)$ であるから $z\in\mu(x)\mu(y)$ である.

逆に $z\in\mu(x)\mu(y)$ とすると $z=uv$ で $u\approx x$, $v\approx y$ となる. したがって, $z\approx xy$ であり, これは $z\in\mu(xy)$ を意味している. □

さて剰余群 $J/\mu(e)$ の元は剰余類 $\mu(x)$ であるから補題 2 より

定理 3.4　G から $J/\mu(e)$ への写像 $x\to\mu(x)$ は準同型写像である.

もし G がハウスドルフ空間であれば各々の剰余類は G の元をただ一つ含む. すなわち, 写像 $x\to\mu(x)$ は 1 対 1 である. この場合証明されたことは

定理 3.5　G がハウスドルフ空間ならば G は $J/\mu(e)$ と同型である.

定理 3.6　$H\subseteq G$ かつ $x\in G$ とする. H が開集合なら xH も開集合である.

証明　$xh \in xH$，$h \in H$ とする．H は開集合であるから $\mu(h) \subseteq {}^*H$ である．xH が開集合であることを示すためには $\mu(xh) \subseteq {}^*(xH) = x({}^*H)$ であることを示せばよい．そこで $g \approx xh$ とすると $x^{-1}g \approx h$，したがって $x^{-1}g \in {}^*H$，これより $g \in x({}^*H)$ となる．□

定理 3.7　$A, B \subseteq G$ で A は閉集合，B はコンパクトであれば AB は閉集合である．

証明　$t \in {}^*(A \cdot B)$，$t \approx g$，$g \in G$ と仮定する．このとき $g \in A \cdot B$ を証明すればよい．${}^*(A \cdot B) = {}^*A \cdot {}^*B$ であるから $t = \alpha \cdot \beta$ となる $\alpha \in {}^*A$，$\beta \in {}^*B$ がある．B はコンパクトであるから，ある $b \in B$ に対して $\beta \approx b$ である．よって $t = \alpha\beta \approx \alpha b$ である．$t \approx g$ であるから $\alpha b \approx g$ であり $\alpha \approx gb^{-1} \in G$. $gb^{-1} \in G$ で $\alpha \in {}^*A$ は閉集合であったから $gb^{-1} \in A$．すなわち $g = (gb^{-1})b \in A \cdot B$ を得る．□

4．ハール測度の存在†

次に，局所コンパクト•ハウスドルフ空間となる位相群上のハール†† 測度の構成を主要な部分で超準解析の手法を用いて，簡潔で直観にしたがった方法で示しておく．(これらの概念について前もって知識は仮定していない)

この節を通じて G はハウスドルフ (空間となる) 位相群とする．例の通り $\mathscr{O}$ は G の開集合の全体の集合，$g \in G$ に対して

$$\mathscr{O}_g = \{E \in \mathscr{O} \mid g \in E\}$$

とする．

定義　$A \subseteq G$ について，$A \subseteq K$ となるコンパクト集合が存在するとき**有界** (bounded) とよばれる．

$\mathscr{B}$ を G の有界集合の全体の集合とする．

定義　$\mathscr{B} \cap \mathscr{O}_e \neq \phi$ のとき G は**局所コンパクト** (locally compact) とよばれる．

さて G が実際に局所コンパクトであると仮定すると，$A_0 \in \mathscr{B}$，$A_0 \in \mathscr{O}_e$ となる A_0 が存在する．これから先 A_0 をこのようなものとして一つ固定しておくことにする．

---

† Hausner [6] に従う．Parikh [13] とも比較すること．

††[訳注]　A.Haar (1885-1933)　偏微分方程式，極小曲面，不変測度の研究で有名．特に Haar measure の一意的存在は最も重要な結果である．

定義 次の条件が満足されるとき，H は A を B から**分離する** (separate) という．

（1） $H \in \mathscr{O}_e$ かつ $A, B \in \mathscr{B}$

（2） すべての $x \in G$ に対して $A \cap xH = \phi$ または $B \cap xH = \phi$

H が A を B から分離するということは，H をどのように"移動"させても，それが A と B と同時に交わることはないことを意味している．

定義 H が A と B を分離するような H が存在するとき，A と B は**分離している** (separated) という．

我々は $\mathscr{B}$ からある順序体 D の中への函数 f について考えようとしているわけである．

定義 f を $\mathscr{B}$ から順序体 D の中への写像とする．このとき次の条件が満足されるとき，f は**許容的** (admissible) とよばれる．

（a） すべての $A \in \mathscr{B}$ について $f(A) \geq 0$

（b） $A \subseteq B$ ならば $f(A) \leq f(B)$

（c） $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$

（d） $f(A_0) = 1$

（e） すべての $A \in \mathscr{B}$，$x \in G$ について $f(xA) = f(A)$

定義 A, B が分離的であるならば常に

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

が成立するとき**弱加法的** (weakly additive) とよばれる．

終りに

定義 λ が $\mathscr{B}$ から R (実数の全体の集合) の中への関数であって，それが許容的かつ弱加法的であるとき**容量函数** (content function) (または単に容量 (content)) という．

我々の主定理は

定理 4.1 G の容量函数が存在する．事実，ハール測度とは，G の"ボレル†集合族" から $R \cup \{\infty\}$ への函数 ν で次の条件を満足するものをいう．

（1） 定義されているときは常に $\nu(A) \geq 0$

（2） $B \in \mathscr{B}$ ならば $\nu(B) < \infty$

†[訳注] E.Borel (1871–1956) 正規函数の除外値，有理数近似の不等式，Borel 集合族等重要な結果がある．例の Heine-Borel の定理等も彼によるという．

(3) $\nu(A_0)=1$

(4) $x\in G$ ならば $\nu(xA)=\nu(A)$

(5) ν は"可算加法的"である.

G の上の容量が与えられれば，このような ν をつくるのは測度論† の直接的応用の一つである.

さて $A\in\mathscr{B}$, $H\in\mathscr{O}_e$ とする. このときはコンパクトな集合 K で $A\subseteq K$ となるものが存在する. そして $e\in H$ であるから $x\in xH$ である. 定理3.6 より xH は開集合である. よって

$$\bigcup_{x\in G} xH=G$$

となる. したがって $\{xH\,|\,x\in G\}$ は K の開被覆である. K はコンパクトであるから $A\subseteq K$ を用いると

$$A\subseteq x_1H\cup x_2H\cup\cdots\cup x_NH \tag{$*$}$$

となる有限集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ が存在する. $(A:H)$ で性質 $(*)$ を満足する N の最小値を記す. そして $A\in\mathscr{B}$ に対して

$$g(A:H)=g_H(A)=\frac{(A:H)}{(A_0:H)}$$

とおく.

補題 1. すべての $H\in\mathscr{O}_e$ について g_H は許容的である. そして H が A と B を分離するときは

$$g_H(A\cup B)=g_H(A)+g_H(B).$$

証明 許容性の条件 (a), …, (e) が成立することを確かめる.

(a) $g_H(A)\geq 0$ は明らか.

(b) $A\subseteq B$ とする. $B\subseteq x_1H\cup\cdots\cup x_NH$ とすると $A\subseteq x_1H\cup\cdots\cup x_NH$. よって

$$(A:H)\leq(B:H).$$

(c) $A\subseteq x_1H\cup\cdots\cup x_NH$ および $B\subseteq y_1H\cup\cdots\cup y_KH$ とすると

$$A\cup B\subseteq x_1H\cup\cdots\cup x_NH\cup y_1H\cup\cdots\cup y_KH.$$

したがって $(A\cup B:H)\leq(A:H)+(B:H)$ である.

(d) $g_H(A_0)=\dfrac{(A_0:H)}{(A_0:H)}=1$

---

† 容量は"外測度" (outer measure) を定めるために最初用いられた. 詳細については Halmos [4] を参照.

（e）　$A \subseteq x_1H \cup \cdots \cup x_NH$ とすれば $xH \subseteq (xx_1)H \cup \cdots \cup (xx_N)H$

$xA \subseteq y_1H \cup \cdots \cup y_KH$ とすれば $A \subseteq (x^{-1}y_1) \cup \cdots \cup (x^{-1}y_K)H$ である．よって $(A:H)=(xA:H)$ を得る．

H が A と B を分離する場合

$$A \cup B \subseteq x_1H \cup \cdots \cup x_NH$$

とすると，x_iH は A と B 両方同時と交わることはないので（心要なら x_i の順を変えて）

$$A \subseteq x_1H \cup \cdots \cup x_kH \qquad B \subseteq x_{k+1}H \cup \cdots \cup x_NH$$

となる．これは $(A \cup B : H)=(A:H)+(B:H)$ を意味している．□

補題 2.　$\mathscr{B}$ から ${}^*R$ への函数 k で許容的かつ弱加法的なものが存在する．

証明　上記の g は $\mathscr{B} \times \mathscr{O}$ から R の中への函数である．したがって ${}^*g$ は ${}^*\mathscr{B} \times {}^*\mathscr{O}$ から ${}^*R$ への函数である．定理1.1によって内集合 $D \in {}^*\mathscr{O}_e$ で $D \subseteq \mu(e)$ となるものが存在する．そこで $A \in \mathscr{B}$ について $k(A)={}^*g_D(A)$ とおく．各 $H \in \mathscr{O}_e$ について g_H は許容的であることは知っているわけであるから，移行原理によって $k={}^*g_D$ は許容的である．そこで k が弱加法的であることを示す．

A, B が $H \in \mathscr{O}_e$ によって分離されているとき，証明すべきことは

$$k(A \cup B)=k(A)+k(B)$$

である．e の開近傍で H の部分集合となるものはすべて A と B を分離するので

$$\models (\forall \mathbf{L} \in \mathscr{O}_e)(\mathbf{L} \subseteq \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} : \mathbf{L})=\mathbf{g}(\mathbf{A} : \mathbf{L})+\mathbf{g}(\mathbf{B} : \mathbf{L}))$$

である．移行原理によって

$$* \models (\forall \mathbf{L} \in {}^*\mathscr{O}_e)(\mathbf{L} \subseteq {}^*\mathbf{H} \rightarrow {}^*\mathbf{g}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} : \mathbf{L})={}^*\mathbf{g}(\mathbf{A} : \mathbf{L})+{}^*\mathbf{g}(\mathbf{B} : \mathbf{L})).$$

しかし $D \subseteq \mu(e) \subseteq {}^*H$ および $D \in {}^*\mathscr{O}_e$ であるから

$${}^*g_D(A \cup B)={}^*g_D(A)+{}^*g_D(B)$$

となる．すなわち $k(A \cup B)=k(A)+k(B)$ である．□

次に

補題 3.　すべての $A \in \mathscr{B}$ について $k(A)$ は有限である．

証明　A を $\mathscr{B}$ の任意の元とする．A は有界であるからコンパクトな K で $A \subseteq K$ となるものがある．K はコンパクトで $A \subseteq K \subseteq \bigcup_{x \in G} xA_D$ であるから，ある有限集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ について

$$A \subseteq x_1A_0 \cup x_2A_0 \cup \cdots \cup x_nA_0$$

である．これより k が許容的であることを用いると

$$\begin{aligned} k(A) &\leq k(x_1A_0 \cup \cdots \cup x_nA_0) \\ &\leq k(x_1A_0) + \cdots + k(x_nA_0) \\ &= k(A_0) + \cdots + k(A_0) = n \end{aligned}$$

となり有限である．□

さて所要の容量函数は

$$\lambda(A) = {}^\circ(k(A))$$

によって定められる．この λ は $\mathscr{B}$ から R の中への写像であり，$^\circ$ は $\leq$ を保つ準同型写像であるから，λ は許容的かつ弱加法的であり，これが実際に容量になっている．

5. 距離空間

空でない集合 X 上の**距離** (metric) とは，$\rho: X \times X \to R$ ですべての $x, y, z \in X$ について次の条件を満足するものであった．

(a) $\rho(x, y) \geq 0$

(b) $\rho(x, y) = 0$ と $x = y$ は同値である

(c) $\rho(x, y) = \rho(x, y)$

(d) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

そして $\rho(x, y)$ は x と y の**距離** (distance) とよばれる．X と距離 d を合せたものを**距離空間** (metric space) とよぶ．

定義　$p \in X$ および実数 $r > 0$ に対して集合

$$B_p(r) = \{g \in X \mid \rho(g, p) < r\}$$

を点 p を**中心** (center) にした半径 r の**開球** (open ball) とよぶ．もし $G \subseteq X$ に対しすべての $p \in G$ について $r \in R^+$ が存在して $B_p(r) \subseteq G$ となるならば G は距離空間 X の**開集合**いう．

このような開集合の全体を $\mathscr{O}$ で記すと X は $\mathscr{O}$ に関して位相空間となるが，これは自明なことであろう．したがって，いままで位相空間について得た性質はすべて成立する．

補題 1．　すべての $p \in X$ および $r \in R^+$ に対して $B_p(r)$ は開集合である．

証明　$g \in B_p(r)$ すなわち $\rho(g, p) < r$ とする．$s = r - \rho(g, p) > 0$ とすると $B_g(s) \subseteq B_p(r)$ が成立することを示そう．このために $m \in B_g(s)$ とすると $\rho(m,$

$g)<s$ であり，

$$\rho(m, p)\leq\rho(m, g)+\rho(g, p)<s+\rho(g, p)=r$$

となって $m\in B_p(r)$ を得る．□

そこで $X, R\subseteq S$ と仮定する．このときは $\rho\in U$ であり $^*\rho$ は $^*X\times{}^*X$ から $^*R$ への写像である．例によって $^*\rho$ を ρ で記する．移行原理より性質 (a), …, (d) はすべての $x, y, z\in{}^*X$ について成立する．もちろん $^*X$ の二点の距離は一般には超実数である．

定理 5.1 任意の $p\in X$ に対して

$$\mu(p)=\bigcap_{r\in R^+}{}^*B_p(r).$$

証明 定理1によって，すべての $r\in{}^*R$ について $B_p(r)\subseteq\mathcal{O}_p$ であるから

$$\mu(p)=\bigcap_{G\in\mathcal{O}_p}{}^*G\subseteq\bigcap_{r\in R^+}{}^*B_p(r).$$

逆方向は，$G\in\mathcal{O}_r$ とすると，定義よりある $r=r_G\in R^+$ が存在して $B_p(r_G)\subseteq G$ である．したがって

$$\bigcap_{r\in R^+}{}^*B_p(r)\subseteq\bigcap_{G\in\mathcal{O}_p}{}^*B(r_G)\subseteq\bigcap_{G\in\mathcal{O}_p}{}^*G=\mu(p)$$

を得る．□

$X=R$ については通常の距離は $\rho(x, y)=|x-y|$ である．この距離と $x_0\in R$ に対しては

$$B_{x_0}(r)=\{x\in R\,|\,x_0-r<x<x_0+r\}$$

であり，この章の初めのところで述べた意味で $B_{x_0}(r)=I_r$ である．したがって定理5.1はすでに知られている結果 $\mu(x_0)=\bigcap_{r\in R^+}{}^*I_r$ を示している．

一般の位相空間にもどって，$g\in{}^*X$，$p\in X$ とする．定理5.1によって $g\approx p$ はすべての $r\in R^+$ について $0\leq\rho(g, p)<r$，すなわち $\rho(g, p)$ が無限小ということと同値である．このことより任意の $p, g\in{}^*X$ について $g\approx p$ で $\rho(g, p)$ が無限小のこととすればよいことがわかる．特に $X=R$ であり $x, y\in{}^*R$ ならば

$x\approx y$ が成立するのは $|x-y|$ が無限小

ということになり，第2章の記法とうまく一致しているわけである．

任意の $p\in{}^*X$ について，$\mu(p)=\{g\in{}^*X\,|\,\rho(g, p)\approx 0\}$ と記して $^*X$ の単子ということができる．

定義 $p\in{}^*X$ について，$g\in X$ が存在して $\rho(p, g)$ が有限のとき p は**有限** (finite) とよぶ．

系 5.2 すべての近準点は有限点である.

証明 $p\in {}^*X$ が近準点とすると, $g\in X$ が存在して $g\approx p$ である. よって $\rho(p,g)\approx 0$, すなわち $\rho(p,g)$ は有限である. □

系 5.3 距離空間はハウスドルフ空間である.

証明 $p,g\in X$ とし $s\in\mu(p)$, $s\in\mu(g)$ とする. したがって $\rho(s,p),\rho(s,g)\approx 0$, よって

$$\rho(p,g)\leq\rho(p,s)+\rho(g,s)\approx 0$$

$\rho(p,g)\in R$ であるから $\rho(p,g)=0$, これより $p=g$ である. □

これより次のように定義することができる.

定義 すべての近準点 p について, $p\in\mu(g)$, $g\in X$ となる g が一意的に定まるので, それを ${}^\circ p$ と記し, ${}^\circ p$ を p の**標準部分** (standard part) とよぶ.

もちろん, これは有限超実数 x に対する ${}^\circ x$ とも一致している

定義 $B\subseteq X$ について, ある $p\in X$ および $r\in R^+$ が存在して $B\subseteq B_p(r)$ となるとき**有界** (bounded) とよばれる.

補題 2. $p\in {}^*X$ が有限で $g\in X$ ならば $\rho(p,g)$ は有限である.

証明 $p\in {}^*X$ は有限であるから, ある $s\in X$ に対して $\rho(p,s)$ は有限である. g を他の標準点とすると

$$\rho(p,g)\leq\rho(p,s)+\rho(s,g)$$

であり $\rho(p,s)$ と $\rho(s,g)$ は有限であるから $\rho(p,g)$ は有限である. □

定理 5.4 $B\subseteq X$ が有界であることと ${}^*B$ の任意の元が有限であることは同値である.

証明 $B\subseteq B_p(r)$ がある $p\in X$ と $r\in R^+$ について成立すると仮定すれば

$$\models(\forall \mathbf{x}\in \mathbf{B})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{p})<\mathbf{r})$$

である. 移行原理によって, すべての $g\in {}^*B$ について $\rho(g,p)<r$ であるから, ${}^*B$ の元はすべて有限である.

逆に, すべての $x\in {}^*B$ は有限とする. $p\in X$ を固定すれば補題2によって, すべての無限超実数に対して $\rho(x,p)<r$ である. したがって

$$*\models(\exists \mathbf{r}\in {}^*\mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{x}\in {}^*\mathbf{B})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{p})<\mathbf{r})$$

となる. 移行原理により, ある $r\in R^+$ があって $B\subseteq B_p(r)$ である. □

系 5.5 コンパクト集合は有界である.

証明 K をコンパクトとし $g\in {}^*K$ とする. このときは $g\approx p$ となる $p\in K$ が存在する. g は有限であるから定理5.4 によって K は有界である. □

定理 5.6　X について次の二条件は同値である：

すべての有界閉集合はコンパクトである.

$^*X$ の有限点は近準点である.

証明　$^*X$ のすべての有限点は近準点とする. B を有界閉集合とし $x \in {}^*B$ とする. B がコンパクトであることを示すには, $x \approx g$ となる $g \in B$ が存在することを示せばよい. 仮定より x は近準点であるから $x \approx g$ となる $g \in X$ が存在する. B は閉集合であるから $g \in B$ である.

逆に, 上の方の条件で満足されているとして, $p \in {}^*X$ を有限とする. そして p が近準点であることを示す. $\rho(p, g) < r$ となる $g \in X$ と $r \in R^+$ が存在するから,

$$H = \{x \in X \mid \rho(x, g) \leq r\}$$

とおく. 明らかに $H \subseteq B_g(r+1)$ であって H は有界である. H が閉集合であることを示すのであるが, そのために $t \in {}^*H$, $t \approx s \in X$ とすると, 移行原理によって $\rho(t, g) \leq r$ である. よって

$$\rho(s, g) \leq r + \rho(t, s).$$

両辺の標準部分をとることによって $\rho(s, g) \leq r$ であり $s \in H$ である. すなわち H は有界閉集合となりコンパクトである. したがって $^*H$ の元はすべて近準点である. $p \in {}^*H$ であるから p は近準点である. □

当然のことであるが, 距離 ρ を有する距離空間 S の部分集合 A は再び距離 ρ (もちろん A に制限して) を有する距離空間である.

定理 5.7　X を距離空間とし $K \subseteq X$ とする. K が X の部分集合としてコンパクトであることと, K を X の部分空間としてコンパクトであることは同値である.

証明　これら両条件は明らかに次の条件と同値である.

すべての $p \in {}^*K$ に対して $g \in K$ が存在して $p \approx g$ である. □

この定理の意義は位相空間のコンパクト性が位相空間の中のコンパクト集合の性質と考えられることである.

次に距離空間の中の点列, すなわち N^+ から X の中への写像 s について考える. 例によって $s(n)$ のことを s_n とも記する. この場合 $^*s$ (これはもちろん s と記される) は $^*N$ から $^*X$ への写像である. $\rho(s_n, x) \to 0$ なる場合 $s_n \to x$ と記して x は点列 $\{s_n \mid n \in N^+\}$ の極限である, または $\{s_n \mid n \in N^+\}$ は x に収束するという. 実数列の収束性の性質 (定理 2-5.1) よりただちに,

定理 5.8 $s_n \to x$ ということと，すべての $n \in {}^*N - N$ について $\rho(s_n, x) \approx 0$ ということは同値である.

系 5.9 $s_n \to x$ ならば $\{s_n | n \in N^+\}$ は有界である.

証明 明らかに $n \in N^+$ について s_n は有限である. 定理5.8によって s_n は近準点である. 定理1-7.13によって ${}^*(s[N^+]) = s[{}^*N^+]$ である. したがって定理5.4により $s[N^+]$ は有界集合である.

系 5.10 $s_n \to x$, $s_n \to y$ ならば $x = y$ である.

証明 $n \in {}^*N - N$ とすると $s_n \approx x$ かつ $s_n \approx y$ である. したがって $x \approx y$. しかるに X はハウスドルフ空間であるから $x = y$ である. □

定理 $\{s_n | n \in N^+\}$ のある部分列が $x \in X$ を極限にもつとき，x はその点列の**極限点** (limit point) であるという.

もし x が $\{s_n\}$ の極限点ならば任意の $\varepsilon \in R^+$ に対して不等式

$$\rho(s_n, x) < \varepsilon$$

が無限に多くの $n \in N^+$ について成立する. 逆に各 $\varepsilon > 0$ に対して無限個の $n \in N^+$ について上の不等式が成立すれば，$\{s_n\}$ の部分列で収束するものが次のようにして定められる.

$n_1 = 1$ として $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$ が定まったとして $n_{j+1} > n_j$ を

$$\rho(s_{n_{j+1}}, x) < \frac{1}{j}$$

となるように定める. このようにすれば $s_{n_j} \to x$ である.

定理2-5.3を一般化して

定理 5.11 x が $\{s_n\}$ の極限であることと，$\nu \in {}^*N - N$ が存在して $s_\nu \approx x$ となることは同値である.

証明 定理2-5.3の証明において "$|s_n - x|$" の部分を "$\rho(s_n, x)$" でそして，"$|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}|$" の部分を "$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_n, \mathbf{x})$" でそれぞれすべて置換えればよい. □

直接の系として次のものを得る.

定理 5.12 (ボルツァーノ†・ワイアストラス†† の定理) コンパクトな距離空間では任意の点列は収束部分列を含む.

証明 $\{s_n | n \in N^+\}$ をこの空間の点列とし，$\nu \in {}^*N - N$ とする. コンパクト

---

†[訳注] B.Bolzano (1781-1848)

††[訳注] K.Weierstrass (1815-1897) 解析函数の理論，極小曲面等に決定的に重要な役割を演じた. 楕円函数の研究でも有名.

性によって s_ν は近準点である．すなわち $s_\nu \approx x \in X$．したがって x はこの点列の極限点である．すなわち x に収束する部分列がある．□

定義　点列 $\{s_n | n \in N^+\}$ について，すべての $\varepsilon>0$ に対して，ある $n_0 \in N^+$ が存在して，すべての $n, m \geq n_0$ に対して $\rho(s_n, s_m)<\varepsilon$ となるとき，**コーシー列**† という．

定理 5.13　$\{s_n | n \in N^+\}$ がコーシー列であることと，すべての $n, m \in {}^*N - N$ について $s_n \approx s_m$ であることは同値である．

証明　$\{s_n\}$ をコーシー列とし，$\varepsilon \in R^+$ とする．このとき，ある $n_0 \in N$ に対して

$$\models (\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{m} \in \mathbf{N}^+)((\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0 \,\&\, \mathbf{m} \geq \mathbf{n}_0) \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m) < \boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから，移行原理によって，$n, m \in {}^*N - N$ に対しては $\rho(s_n, s_m)<\varepsilon$ である．$\varepsilon>0$ は任意であるから $\rho(s_n, s_m) \approx 0$，すなわち $s_n \approx s_m$ である．

逆に $n, m \in {}^*N - N$ について $s_n \approx s_m$ と仮定する．$\varepsilon \in R^+$ に対して n_0 を無限整数にとると

$$* \models (\exists \mathbf{n}_0 \in {}^*\mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{n} \in {}^*\mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{m} \in {}^*\mathbf{N})((\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0 \,\&\, \mathbf{m} \geq \mathbf{n}_0) \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m) < \boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから，移行原理を用いればよい．□

定義　位相空間 X のすべてのコーシー列が極限をもつとき，X は**完備距離空間** (complete metric space) という．

定理 5.14　$s_n \rightarrow x$ ならば $\{s_n\}$ はコーシー列である．

証明　$\{s_n | n \in N^+\}$ は収束するのであるから，すべての $\nu, \mu \in {}^*N - N$ について，$s_\nu \approx x$，$s_\mu \approx x$ である．これは $s_\nu \approx s_\mu$ を意味している．□

定理 5.15　コーシー列 $\{s_n\}$ が極限点をもてば，$\{s_n\}$ はその点に収束する．

証明　$\{s_n\}$ の極限点の一つを x とすると，$\nu_0 \in {}^*N - N$ で $s_{\nu_0} \approx x$ となるものが存在する．$\{s_n\}$ はコーシー列であったから，$\nu \in {}^*N - N$ について $s_\nu \approx s_{\nu_0}$ である．したがって，すべての $\nu \in {}^*N - N$ について $s_\nu \approx x$ である．□

系 5.16　コンパクトな距離空間は完備である．

証明　コンパクトな距離空間ではすべての点列は極限点を有する．□

定理 5.17　コーシー列は有界である．

証明　$\{s_n | n \in N^+\}$ をコーシー列とする．ν を任意の無限整数とする．系5.9の証明と同様に s_ν が有限であることを示せばよい．そこで集合

---

†[訳注]　A.Cauchy (1789-1857) の列，基本列 (fundamental sequence) ともいう．

$$A=\{n\in{}^*N\,|\,*\models\boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_\nu,\mathbf{s}_n)<\mathbf{1}\}$$

を考えれば，明らかに A は ${}^*N$ の定義可能な部分集合であり，したがって内集合である．$\{s_n|n\in N^+\}$ はコーシー列であるから ${}^*N-N\subseteq A$ である．${}^*N-N$ は外集合であり，A は内集合であるから $A\cap N\neq\phi$ である．これより，ある $n\in N$ に対して $*\models\rho(s_\nu,s_n)<1$. したがって s_ν は有限でなくてはならない．□

定理 5.18 X を完備距離空間とし A をその閉部分集合とすれば，X の部分空間として A は完備である．

証明 $\{s_n\}$ を A のコーシー列とする．X は完備であるから，ある $x\in X$ について $s_n\to x$ である．すべての $n\in{}^*N-N$ に対して（移行原理によって）$s_n\in{}^*A$ かつ $s_n\approx x$ である．A は閉集合であるから $x\in A$ となり，A は完備である．□

定理 5.19 X のすべての有限点が近準点ならば X は完備である．

証明 $\{s_n|n\in N^+\}$ をコーシー列とすると，証明すべきことはこの列が極限点を有することである．無限整数 ν をとると，定理 5.17 によって s_ν は有限である．よって $s_\nu\approx x\in X$. しかし，定理 5.11 によって x は $\{s_n\}$ の極限点である．□

次の定理は完備性と同値であって超準解析での有用な性質である．

定理 5.20 X が完備であることと，すべての遠準点 $p\in{}^*X$ に対しある $r>0$ が存在して，すべての $g\in X$ に対して $\rho(p,g)\geq r$ であることは同値である．

証明 X を完備として，後半の条件が成立しないと仮定する．これより，遠準点 $p\in{}^*X$ および標準的な点列 $\{g_n|n\in N^+\}$ が存在して，すべての $n\in N^+$ に対して

$$\rho(p,g_n)<\frac{1}{n}$$

が成立する．したがって

$$\rho(g_m,g_n)\leq\rho(g_m,p)+\rho(g_n,p)\leq\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

である．よって $\{g_n|n\in N^+\}$ はコーシー列で，極限点 $p\in X$ を有する．しかし，このときは，すべての $n\in N^+$ について

$$\rho(p,g)\leq\rho(p,g_n)+\rho(g_n,p)<\frac{1}{n}+\rho(g_m,p)$$

となる．これは $\rho(p,g)\approx0$ を意味し，p が遠準点であることに矛盾する．

逆の方向については，$\{s_n | n \in N^+\}$ をコーシー列として，定理5.11および5.15によって s_ν が近準点であることを示せばよい．そこで s_ν を遠準点とすると，仮定によって，実数 $r>0$ が存在して

$$\text{すべての } g \in X \text{ について } \rho(s_\nu, g) \geq r$$

である．特に

$$\text{すべての } n \in N^+ \text{ について } \rho(s_\nu, s_n) \geq r$$

となる．$\{s_n | n \in N^+\}$ はコーシー列であるから，$n_0 \in N^+$ が存在して

$$\models (\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{m} \in \mathbf{N}^+)((\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0 \,\&\, \mathbf{m} \geq \mathbf{n}_0) \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_m) < \mathbf{r}).$$

移行原理によって，$n, m \in {}^*N^+$，$n, m \geq n_0$ ならば $\rho(s_n, s_m) < r$ であるが，$m = \nu$，$n \geq n_0$ と選べば矛盾である．□

この節も終りになったが，後に有効に用いられる内部性の結果について述べておく．

定理 5.21（**遠準性定理**（remoteness theorem））　$\{p_n | n \in {}^*N^+\}$ を ${}^*X$ の内点列とする．実数 $r>0$ について，すべての $j, k \in N^+$，$j \neq k$ について $\rho(p_j, p_k) \geq r$ ならば，ある $n \in {}^*N^+$ について p_n は遠準点である．

証明　すべての $n \in {}^*N^+$ について p_n が近準点とする．各 $n \in N^+$ について $g_n = {}^\circ(p_n)$ とすると，g は N^+ から X の中への標準的函数であり，${}^*g$（例によって g と記す）は ${}^*N^+$ から ${}^*X$ への函数である．（もちろん $g_n \approx p_n$ は $n \in N^+$ については成立する）　そして内点列（定理1-8.7）

$$\{\rho(g_n, p_n) | n \in {}^*N^+\}$$

を考えると，すべての $n \in N^+$ について $\rho(g_n, p_n) \approx 0$ であるから，無限小延長定理によって，$\nu \in {}^*N - N$ が存在して，すべての $n < \nu$ について

$$\rho(g_n, p_n) \approx 0$$

となる．$\mu \in {}^*N - N$ を選ぶと，p_μ は近準点であるから $g = {}^\circ(p_\mu)$ とおくと，$\rho(p_\mu, g_\mu) \approx 0$，$\rho(p_\mu, g) \approx 0$ であるから $g_\mu \approx g$ である．よって g は点列 $\{g_n | n \in N^+\}$ の一つの極限点である．すなわちある部分列について $g_{n_j} \rightarrow g$ である．この部分列は収束するのであるからコーシー列である．よって j_0 が存在して，$j, k \geq j_0$ ならば $\rho(g_{n_j}, g_{n_k}) < r/2$ となる．不等式

$$\rho(p_{n_j}, p_{n_k}) \leq \rho(p_{n_j}, g_{n_j}) + \rho(g_{n_j}, g_{n_k}) + \rho(g_{n_k}, p_{n_k})$$

が成立し，この右辺の第1,3項は無限小であるから $\rho(p_{n_j}, p_{n_k}) < r$ となる．これは矛盾である．□

6. 一様収束

この節では距離空間 X から距離空間 T への函数やそのような函数の列について考える.

定義 函数列 $\{f_n | n \in N^+\}$ が X 上で f に**一様収束** (converges uniformly to f on X) するとは, すべての $\varepsilon>0$ について, $n_0 \in N^+$ が存在して, すべての $p \in X$ と $n \geq n_0$ について

$$\rho(f_n(p), f(p)) < \varepsilon$$

となることをいう. そしてこのような場合 $f_n \Rightarrow f$ と記する.

定理 6.1 X 上で $f_n \Rightarrow f$ であることと, すべての $p \in {}^*X$ と $\nu \in {}^*N - N$ について

$$f_\nu(p) \approx f(p)$$

となることは同値である.

証明 X 上で $f_n \Rightarrow f$ と仮定し, 任意の実数 $\varepsilon>0$ を考える. これに対して $n_0 \in N^+$ が存在して

$$\models (\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{p} \in \mathbf{X})(\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0 \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}_n(\mathbf{p}), \mathbf{f}(\mathbf{p})) < \boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから, 移行原理によって, すべての $p \in {}^*X$ と $\nu \in {}^*N - N$ に対して

$$\rho(f_\nu(p), f(p)) < \varepsilon$$

となる. $\varepsilon>0$ は任意であったから

$$\rho(f_\nu(p), f(p)) \approx 0.$$

これは $f_\nu(p) \approx (p)$ を意味している.

逆に, $p \in {}^*X$, $\nu \in {}^*N - N$ ならば $\rho(f_\nu(p), f(p)) \approx 0$ と仮定すると,

$$* \models (\exists \mathbf{n}_0 \in {}^*\mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{n} \in {}^*\mathbf{N}^+)(\forall \mathbf{p} \in {}^*\mathbf{X})(\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0 \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}_n(\mathbf{p}), \mathbf{f}(\mathbf{p})) < \boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから移行原理を用いて X 上で $f_n \Rightarrow f$ である. □

定理 6.2 X 上で $f_n \Rightarrow f$ とし, すべての f_n は X 上で連続すれば, f は X 上で連続である.

証明 $g \in X$, $p \in {}^*X$, $p \approx g$ と仮定する. 証明すべきことは $f(p) \approx f(g)$ である. それぞれの有限の n について f_n は連続であるから, 超実数の内点列

$$\{\rho(f_n(p), f_n(g)) | n \in {}^*N^+\}$$

は, すべての有限な n に対して無限小である. したがって無限小延長定理によって, $\nu \in {}^*N - N$ が存在して, すべての $n < \nu$ に対して

$$\rho(f_n(p), f_n(g))\approx 0$$

である．$\mu\in{}^*N-N$ を $\mu<\nu$ となるようにとると

$$f_\mu(p)\approx f_\mu(g)$$

であり，仮定により $f(p)\approx f_\mu(p)$, $f(g)\approx f_\mu(g)$ であるから $f(p)\approx f(g)$ を得る．□

定理 6.3（**ディニ**† **の定理**）$\{f_n|n\in N^+\}$ をコンパクト空間 X から R への連続函数列とする．すべての $p\in X$, $n\in N^+$ について $f_{n+1}(p)\leq f_n(p)$ であり，すべての $p\in X$ について $f_n(p)\to f(p)$ で f が X 上連続であれば，X 上で $f_n\Rightarrow f$ である．

証明　一般性を失うことなしに，すべての $p\in X$ について $f(p)=0$ としてもよい（そうでない場合は単に $\{f_n-f|n\in N^+\}$ を考えればよい）．

さて仮定によって，$n, m\in N^+$, $n\geq m$ ならばすべての $p\in X$ について $0\leq f_n(p)\leq f_m(p)$ である．そこで $p\in{}^*X$, $\nu\in{}^*N-N$ とすれば証明すべきことは $f_\nu(p)\approx 0$ である．X はコンパクトであったから $p\approx g\in X$ となる g が存在する．f_n は連続であるから，すべての $n\in N^+$ について $f_n(p)\approx f_n(g)$ である．$f_n(g)\in R$ であるから $f_n(g)={}^\circ(f_n(p))$．そして $f_n(p)$ は有限であるから $f_\nu(p)$ も有限であり近準点となる．したがってすべての $n\in N^+$ について

$$0\leq{}^\circ(f_\nu(p))\leq{}^\circ(f_n(p))=f_n(g)$$

である．$f_n(g)\to 0$ であるから，${}^\circ(f_\nu(p))=0$ すなわち $f_\nu(p)\approx 0$ である．□

7.　一様連続性と同程度連続性

引続き距離空間 X から距離空間 T への函数について考える．

定義　f が X 上で**一様連続**（uniformly continuous）とは，すべての実数 $\varepsilon>0$ に対して，実数 $\delta>0$ が存在して，すべての $p, q\in X$ について

$$\rho(p, q)<\delta \quad ならば \quad \rho(f(p), f(q))<\varepsilon$$

となることをいう．

${}^*X$ から ${}^*T$ への函数については，いくつかの連続性の概念が用いられる．

定義　f を ${}^*X$ から ${}^*T$ への函数で $q\in{}^*X$ とする．このとき f が点 q で**局所連続**（micro-continuous）とは，すべての $p\in{}^*X$ について

---

†［訳注］　U. Dini（1847-1918）　微分方程式や積分方程式にすぐれた研究があり特に不等式を用いた収束性の評価で有名．

$$p \approx q \quad ならば \quad f(p) \approx f(q)$$

となることをいう．すべての $q \in {}^*X$ について f が q で局所連続のとき f は ${}^*X$ で局所連続という．

定理 7.1　f が X 上で一様連続ということと，f が ${}^*X$ 上で局所連続ということは同値である．

証明　f を X 上で一様連続する．このとき，すべての実数 $\varepsilon>0$ に対して，実数 $\delta>0$ が存在して

$$\models(\forall \mathbf{p} \in \mathbf{X})(\forall \mathbf{q} \in \mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q})<\boldsymbol{\delta} \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}(\mathbf{p}), \mathbf{f}(\mathbf{q}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

が成立する．移行原理によって，すべての $p, q \in {}^*X$ に対して

$$\rho(p, q)<\delta \quad ならば \quad \rho(f(p), f(q))<\varepsilon.$$

すなわち，$p \approx q$ なら $\rho(f(p), f(q))$ はどんな実数 $\varepsilon>0$ より小さいから $\rho(f(p), f(q)) \approx 0$ となる．したがって $f(p) \approx f(q)$．これは f が ${}^*X$ 上で局所連続であることを意味している．

逆に，f が ${}^*X$ 上で局所連続とするとき，実数 $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を無限小にとり，$p, q \in {}^*X$ を $\rho(p, q)<\delta$ となるようにとると $\rho(f(p), f(q))<\varepsilon$ である．したがって，

$$*\models(\exists \boldsymbol{\delta} \in {}^*\mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{p} \in {}^*\mathbf{X})(\forall \mathbf{q} \in {}^*\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q})<\boldsymbol{\delta} \rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}(\mathbf{p}), \mathbf{f}(\mathbf{q}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

となる．これに移行原理を用いればよい．□

定理 7.2　f がコンパクト空間 X 上で連続ならば，f は X 上で一様連続である．

証明　前定理によって f が X 上で局所連続であることをいえばよい．そこで $p, q \in {}^*X, p \approx q$ と仮定する．証明すべきことは $f(p) \approx f(q)$ である．X はコンパクトであるから $q \approx s \in X$ となる q が存在する．したがって $p \approx s$ でもある．これより $f(p) \approx f(s), f(q) \approx f(s)$ となるので $f(p) \approx f(q)$ である．□

定義　X から T への函数より成る函数列 $\{f_n | n \in N^+\}$ について，それが**同程度連続** (equicontinuous) とは，すべての実数 $\varepsilon>0$ に対して，実数 $\delta>0$ が存在して，すべての $p, q \in X$ と $n \in N^+$ について

$$\rho(p, q)<\delta \quad ならば \quad \rho(f_n(p), f_n(q))<\varepsilon$$

となることをいう．

定理 7.3　$\{f_n | n \in N^+\}$ が X 上で同程度連続ということと，すべての $n \in {}^*N$ について f_n が ${}^*X$ 上で局所連続ということは同値である．

証明　$\{f_n\}$ を X 上で同程度連続として，実数 $\varepsilon>0$ を考える．このとき $\delta>$

0 が存在して

$$\models(\forall \mathbf{n}\in \mathbf{N}^{+})(\forall \mathbf{p}\in \mathbf{X})(\forall \mathbf{q}\in \mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})<\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}(\mathbf{p}),\mathbf{f}(\mathbf{q}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

となる．移行原理より，すべての $n\in{}^*N^+$ と $p,q\in{}^*X$ について

$$\rho(p,q)<\delta \quad \text{ならば} \quad \rho(f_n(p),f_n(q))<\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ は任意であったから，$p\approx q$ ならば $f_n(p)\approx f_n(q)$ を得る．よってすべての $n\in{}^*N$ について f_n は局所連続である．

逆に，すべての $n\in{}^*N^+$ について f_n が ${}^*X$ 上で局所連続とする．実数 $\varepsilon>0$ については

$$*\models(\exists \boldsymbol{\delta}\in {}^*\mathbf{R}^{+})(\forall \mathbf{p}\in {}^*\mathbf{X})(\forall \mathbf{q}\in {}^*\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})<\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}_n(\mathbf{p}),\mathbf{f}_n(\mathbf{q}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから，移行原理によって所要の結果を得る．□

定理 7.4 すべての $p\in X$ について $f_n(p)\to f(p)$ であり，$\{f_n|n\in N^+\}$ が同程度連続ならば f は X 上で一様連続である．

証明 仮定によって

$$\models(\forall \boldsymbol{\varepsilon}\in \mathbf{R}^{+})(\forall \mathbf{u}\in \mathbf{X})(\exists \mathbf{m}\in \mathbf{N}^{+})(\forall \mathbf{n}\in \mathbf{N}^{+})(\mathbf{n}>\mathbf{m}\to\mathbf{p}(\mathbf{f}_n(\mathbf{u}),\mathbf{f}(\mathbf{u}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

であるから，移行原理を用い，$\varepsilon>0$ を無限小にとれば $p,q\in{}^*X$ に対し $\nu_p,\nu_q\in{}^*N^+$ が存在して

$$n\geq\nu_p \quad \text{ならば} \quad \rho(f_n(p),f(p))<\varepsilon$$
$$n\geq\nu_q \quad \text{ならば} \quad \rho(f_n(q),f(q))<\varepsilon$$

である．そこで $p\approx q$ ならば $\mu\geq\nu_p,\nu_q$ なる無限整数をとると

$$f(p)\approx f_\mu(p)\approx f_\mu(q)\approx f(q).$$

これより f は X 上一様連続である．□

定理 7.5 X をコンパクト空間とし，すべての $p\in X$ について $f_n(p)\to f(p)$ とする．さらにすべての $n\in N^+$ について f_n は X 上連続のときは，X 上で $f_n\Rightarrow f$ であることと，$\{f_n|n\in N^+\}$ が同程度連続ということは同値である．

証明 X 上で $f_n\Rightarrow f$ と仮定する．f は X 上で連続である．X コンパクトであるから，f およびすべての $n\in N^+$ について f_n は連続である．したがって f およびすべての $n\in N^+$ について f_n は ${}^*X$ 上で局所連続である．さて $\nu\in{}^*N-N$ とすると $p,q\in{}^*X$ かつ $p\approx q$ ならば

$$f_\nu(p)\approx f(p)\approx f(q)\approx f_\nu(q).$$

すなわち，すべての $n\in{}^*N-N$ について f_n は局所連続である．$n\in N^+$ についてはもちろん成立するから $\{f_n|n\in N^+\}$ は同程度連続である．

逆に，$\{f_n|n\in N^+\}$ を同程度連続とする．このときは，すべての $n\in{}^*N^+$ に

ついて f_n は $^*X$ 上で局所連続である. $q\in{}^*X$ とすると, X はコンパクトであるから $q\approx p\in X$ となる p が存在する. したがってすべての $n\in{}^*N^+$ について $f_n(q)\approx f_n(p)$. ν を無限にとると, さらに $f_\nu(p)\approx f(p)$ である. 定理7.4により f は X 上(一様)連続であるから $f(p)\approx f(q)$. これより $\nu\in{}^*N-N$ について

$$f_\nu(q)\approx f_\nu(p)\approx f(p)\approx f(q)$$

である. したがって, X 上で $f_n\Rightarrow f$ である. □

局所連続性の概念と他の二つの関連する概念との違いについて記しておこう.

定義　f を $^*X$ から $^*T$ への函数とし, $q\in{}^*X$ とする. このとき,

f が q で **$\varepsilon\delta$-連続** ($\varepsilon\delta$-continuous) とは, すべての実数 $\varepsilon>0$ に対して, 実数 $\partial>0$ が存在して, すべての $p\in{}^*X$ について

$$\rho(p,q)<\delta \quad \text{ならば} \quad \rho(f(p),f(q))<\varepsilon \qquad (\ddagger)$$

となることをいう.

f が q で **$*$-連続** ($*$-continuous) とは, すべての超実数 $\varepsilon>0$ に対して, 超実数 $\delta>0$ が存在して, すべての $p\in{}^*X$ について $(\ddagger)$ が成立することをいう.

補題 1.　f が X 上の連続であるならば, すべての $q\in{}^*X$ について f は q で $*$-連続である.

証明　連続性の仮定より

$$\models(\forall \mathbf{q}\in\mathbf{X})(\forall \boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbf{R}^+)(\exists\boldsymbol{\delta}\in\mathbf{R}^+)(\forall\mathbf{x}\in\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{q},\mathbf{x})<\boldsymbol{\delta}\rightarrow\boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}(\mathbf{q}),\mathbf{f}(\mathbf{x}))<\boldsymbol{\varepsilon})$$

であるが, 移行原理によって, すべての $q\in{}^*X$ について f は q で $*$-連続である. □

補題 2.　f が q で $\varepsilon\delta$-連続であれば, f は q で局所連続である.

証明　仮定より, 任意の実数 $\varepsilon>0$ に対して, 実数 $\delta>0$ が存在して, すべての $p\in{}^*X$ に対して

$$\rho(p,q)<\delta \quad \text{ならば} \quad \rho(f(p),f(q))<\varepsilon$$

である. $p\approx q$ とすれば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\rho(f(p),f(q))<\varepsilon$ であるから, $f(p)\approx f(q)$ である. □

この補題の逆方向が成立しないことを見るために, 次のような例に注意しておく.

例 1.　$^*R$ 上の函数 f を次のように定義する：

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\approx 0\\ 1 & \text{その他.}\end{cases}$$

この f は明らかに局所連続であるが，f は $\varepsilon\delta$-連続ではない．それはどんな実数 $\delta>0$ についても

$$\rho\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)<\delta \quad \text{であるが} \quad \rho\left(f\left(\frac{\delta}{2}\right), f(0)\right)=1$$

となるからである．

次のものは＊-連続であるが，局所連続でないような例である．

例 2.　$x\in R$ に対して $f(x)=x^2$ とおく．移行原理によって，すべての $x\in {}^*R$ について $f(x)=x^2$ である．f は R 上で連続であるから，f は＊-連続である．しかし f は ${}^*R$ 上で局所連続ではない．事実 $\nu\in {}^*N-N$ について $\nu\approx\nu+\dfrac{1}{\nu}$ であるが

$$\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)^2=\nu^2+2+\frac{1}{\nu^2}\approx\nu^2+2\not\approx\nu^2$$

となるからである．

最後に，(内的な)函数で局所連続であるが＊-連続でない例について述べておく．

例 3.　$\alpha>0$ で $\alpha\approx 0$ とする．そして

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\ x\in {}^*R,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

とおくと，点 $x=0$ において f は局所連続であるが＊-連続でない．局所連続性を確かめるために $x\approx 0$，$x\neq 0$ とすると，移行原理を用いて

$$|f(x)-f(0)|=\left|\alpha\sin\frac{1}{x}\right|\leq|\alpha|\approx 0.$$

f は点 0 において＊-連続でないことを示すため $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$ とする．すべての $n\in {}^*N$ について $x=1/(2n\pi+\pi/2)$ とすると $\sin(1/x)=1$ である．したがってどんな超実数 $\delta>0$ に対しても $0<x<\delta$ となる x が存在して

$$|f(x)-f(0)|=\alpha\sin\frac{1}{x}=\alpha>\varepsilon$$

となる．

局所連続性から $\varepsilon\delta$-連続性が導かれるわけではないが，内函数についてはそれが成立するのである．

補題 3.　f を内函数とし q で局所連続とすると f は q で $\varepsilon\delta$-連続である．

証明　$\varepsilon>0$ を任意に与えられた実数とする．そして集合

$$A=\{n\in{}^*N^+ \mid * \models (\forall \mathbf{p}\in{}^*\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p},\mathbf{q})<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\rightarrow\boldsymbol{\rho}(\mathbf{f}(\mathbf{p}),\mathbf{f}(\mathbf{q}))<\boldsymbol{\varepsilon})\}$$

とすると，A は ${}^*N^+$ の定義可能な部分集合であり，したがって内集合である．他方において，f の q における局所連続性によって ${}^*N-N\subset A$，そして A は内集合であり ${}^*N-N$ は外集合であるから，$A\cap N^+\neq\phi$ である．$k\in A\cap N^+$ として $\delta=1/k$ とすると，すべての $p\in{}^*X$ について

$$\rho(p,q)<\delta \quad ならば \quad \rho(f(p),f(q))<\varepsilon.$$

すなわち f は q で $\varepsilon\delta$-連続である．□

これらの考察によって次の重要な定理に導かれる．

定理 7.6　**（近似定理）**　X をコンパクト空間とし，f を ${}^*X$ 上局所連続な内函数とする．さらにすべての $p\in X$ について $f(p)$ が近準点とする．すべての $p\in X$ について $F(p)={}^\circ(f(p))$ と定義すれば，F は X 上連続ですべての $p\in{}^*X$ について $F(p)^\dagger\approx f(p)$ である．

証明　$p\in X$ とする．そして F が p で連続であることを示す．f は内函数で局所連続であるから f は $\varepsilon\delta$-連続である．$\varepsilon>0$ を任意の実数とすると，$\varepsilon\delta$-連続性によって，$\delta>0$ が存在して，すべての $q\in{}^*X$ について

$$\rho(q,p)<\delta \quad ならば \quad \rho(f(q),f(p))<\frac{\varepsilon}{2}$$

であるから，q を $\rho(q,p)<\varepsilon$ なる X の任意の元とする．F はそこでも定義されているわけだから $f(q)=F(q)$，$f(p)\approx F(p)$ である．よって

$$\rho(F(q),F(p))\leq\rho(F(q),f(q))+\rho(f(q),f(p))+\rho(f(p),F(p))<\varepsilon.$$

これは F が点 p で連続であることを意味しており，p は任意であったから F は X 上で連続である．

さて $p\in{}^*X$ とすると，X はコンパクトであったから $p\approx q\in X$ となる q が存在する．f は局所連続であったから $f(p)\approx f(q)$ であり，F の定義より $f(q)\approx F(q)$ である．そして，(上で見たように) F は連続であったから $F(p)\approx f(p)$ である．□

この近似定理の応用として次の有名な定理が得られる．

定理 7.7（アルツェラ・アスコリ[††] の定理）　コンパクト空間 X からコンパ

---

†[訳注]　この F はもちろん ${}^*F$ の略記である．

††[訳注]　C. Arzela (1847-1912),　G. Ascoli (1842-1896)

クト空間 T への同程度連続な函数列は一様収束する部分列を含む.

証明 $\{f_n | n\in N^+\}$ を同程度連続な函数列とする. ν を無限整数の一つとすると定理7.3によって f_ν は $^*X$ 上局所連続である. f_ν は内函数であるから近似定理が用いられる. すなわち $p\in X$ について $F(p)={}^\circ(f_\nu(p))$ とすると, すべての $p\in{}^*X$ について $f_\nu(p)\approx F(p)$ である. すなわち, すべての $k, m\in N^+$ について

$$*\models(\exists \mathbf{q}\in{}^*\mathbf{N}^+)\Big(\mathbf{q}\geq\mathbf{m}\,\&\,(\forall\mathbf{x}\in{}^*\mathbf{X})\Big(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{F}(\mathbf{x}),\mathbf{f}_q(\mathbf{x}))<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\Big)\Big)$$

となる. 移行原理によって, $N\times N$ を N に写す函数 q があって $q(m,k)>m$ であって

$$\text{すべての } x\in X \text{ について } \rho(F(x), f_{q(m,k)}(x))<\frac{1}{k}$$

となる. そこで $n_0=1$, $n_{i+1}=q(n_i, i+1)$ とすると $n_{i+1}>n_i$ であり $i\geq1$ については $\rho(F(x), f_{n_i}(x))<\dfrac{1}{i}$. これは $f_{n_i}\Rightarrow F$ であることを意味している. □

8. コンパクト写像

X および T を距離空間とし, f を X から T への函数とする.

定義 X のすべての有界集合 B に対して, T のコンパクト集合 K が存在して $f[B]\subseteq K$ となるとき, f は**コンパクト**であるとよばれる.

函数がコンパクトであることの超準解析での判定法は次のようである.

定理 8.1 f がコンパクトであるための必要十分条件は, $^*X$ の有限点を $^*T$ の近準点に写すことである.

証明 f をコンパクト, $p\in{}^*X$ を有限点と仮定する. 証明すべきことは, $f(p)$ が近準点となることである. p が有限点であるから, $q\in X$ および $r\in R^+$ が存在して $\rho(p,q)<r$ である. そこで

$$B=\{x\in X | \rho(x,q)<r\}$$

とおくと, $B\subseteq B_q(r+1)$ であるから B は有界である. したがって $f[B]\subseteq K$ となるコンパクトな集合 K が存在する. $p\in{}^*B$ であるから $f(p)\in f[{}^*B]={}^*(f[B])$ となり $f(p)\in{}^*K$ である. $^*K$ はコンパクトであるから $f(p)$ は近準点である.

逆に，f は $^*X$ の有限点を $^*T$ の近準点に写すとし，B を X の有界集合とする．証明すべきことは，$f[B] \subseteq K$ となるコンパクト集合が存在することである．そこで，K を T の元 q で，ある $p \in {}^*(f[B])$ に対して $q \approx p$ となるものの全体とすると，明らかに $f[B] \subseteq K$ である．したがって K がコンパクトであることを示せばよい．

さて，$q \in K$ とし，ε を正の数とすると

$$* \models (\exists \mathbf{p} \in {}^*(\mathbf{f}[\mathbf{B}]))\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

移行原理より，すべての $q \in K$ と $\varepsilon \in R^+$ に対して，$p \in f[B]$ が存在して $\rho(q, p) < \varepsilon$ である．すなわち

$$\models (\forall \mathbf{q} \in \mathbf{K})(\forall \mathbf{r} \in \mathbf{R}^+)(\exists \mathbf{p} \in \mathbf{f}[\mathbf{B}])\boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

移行原理を再び用いると，$q \in {}^*K$ であり ε を正の無限小とすると，$p \in {}^*(f[B]) = f[{}^*B]$ が存在して，$\rho(q, p) < \varepsilon$ すなわち $q \approx p$ である．

さて B は有界であるから $^*B$ の元は有限であり仮定より p は近準点である．そこで $p \approx s$ とする．K の定義によって，$s \in K$ であり $q \approx p \approx s$．これは $^*K$ の元は K の元と無限に近いこと，すなわち K がコンパクトであることを意味している．□

この性質の応用として

定理 8.2 $\{f_n | n \in N^+\}$ を X から完備距離空間 T へのコンパクト写像の列とする．X 上で $f_n \Rightarrow f$ ならば f はコンパクトである．

証明 $p \in {}^*X$ で p を有限とする．定理8.1によって $f(p)$ が近準点であることを示せばよい．そこで $f(p)$ が遠準点とすると，遠準性定理によって，$r \in R^+$ が存在して，すべての $q \in T$ に対して $\rho(f(p), q) \geq r$ となる．しかし $n_0 \in N$ が存在して，すべての $s \in X$ に対して $\rho(f_{n_0}(s), f(s)) \leq r/2$ であるから，移行原理によって，$\rho(f_{n_0}(p), f(p)) < r/2$ となる．f_{n_0} はコンパクトであるから $f_{n_0}(p)$ は有限となり $f_{n_0}(p)$ は近準点である．よって $f_{n_0}(p) \approx q \in T$ とおくと，

$$\rho(f(p), q) \leq \rho(f(p), f_{n_0}(p)) + \rho(f_{n_0}(p), q) < r$$

となり矛盾である．□

4　ノルム線形空間

1. 線形空間

この章では，体 D 上の線形空間 $\mathscr{N}$ を考える．我々の目的のためには，$D, \mathscr{N} \subseteq S$ と仮定しておく．このようにすると線形空間の公理は言語 $\mathscr{L}$ の文章の U における正しさを通じて表現できるので，移行原理を通じて ${}^*\mathscr{N}$ は体 ${}^*D$ 上の線形空間となるのである．

実際には，体としては二つのものを考える．すなわち実数体 R と複素数体 C である．関係 $z=x+iy$ を通じて $z \in C$ と $x, y \in R$ が同値の関係で結ばれているから

$${}^*C=\{x+iy \mid x, y \in {}^*R\}$$

である．$z=x+iy \in {}^*C$ については，$|z|$ は超実数 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ である．もし z が有限であれば，x および y も有限であって

$${}^\circ z={}^\circ x+i({}^\circ y)$$

となるので，${}^\circ$ は ${}^*C$ の一部分で定義され C の中の値を有する準同型写像である．

定義　$\mathscr{N}$ が体 D 上の**ノルム線形空間** (normed linear space) とは D 上の線

形空間で$\mathscr{N}$からRへの写像$\|\ \|$が定義されており，すべての$x, y \in \mathscr{N}$と$\alpha \in D$について

（1） $\|x\| \geq 0$

（2） $\|x\|=0$ と $x=0$ は同値

（3） $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

（4） $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ （三角不等式）

を満足するものをいう．

$\|x\|$はxの**ノルム**(norm)とよばれる．

函数$\rho(x, y)=\|x-y\|$がノルム線形空間上の距離を与えていることは，3章の結果を考えれば明らかなことであろう．もし，$\mathscr{N}$が完備な距離空間にもなっている場合は**バナッハ**†**空間**とよばれる．

超準空間においては，$\|x\| \in {}^*R$はすべての$x \in {}^*\mathscr{N}$について定められている．したがって，移行原理によって性質(1)から(4)までが，すべての$x, y \in {}^*\mathscr{N}$および$\alpha \in {}^*D$について成立するのである．

$D=R$とか$D=C$となる場合はDそれ自体が体の算法に関して，$\|x\|=|x|$によってノルム空間になっていることに注意しておこう．

$x \in {}^*\mathscr{N}$は$x \approx 0$のとき**無限小**(infinitesimal)とよばれる，すなわち，

定理 1.1 $x \in {}^*\mathscr{N}$が無限小であることと$\|x\| \approx 0$は同値である．

証明 $x \approx 0$は$\rho(x, 0) \approx 0$と同値であり，それは$\|x\| \approx 0$と同値でもある．□

定理 1.2 $x, y \in {}^*\mathscr{N}, x \approx y$ ならば $\|x\| \approx \|y\|$である．

証明 一般性を失うことなしに$\|x\| \leq \|y\|$と仮定してよいであろう．このときは，$\|y\|=\|x+(y-x)\| \leq \|x\|+\|y-x\|$であるから

$$0 \leq \|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| \approx 0$$

となる．これより$\|y\|-\|x\| \approx 0$すなわち$\|x\| \approx \|y\|$である．□

定理 1.3 $x \in {}^*\mathscr{N}$が有限点(3章5節の意味で)であるための必要十分条件は，$\|x\|$が超実数として有限となることである．

証明 $\|x\|$が有限であれば$\|x-0\|$が有限であるからxは有限点である．

逆に，xが有限点であれば，$y \in \mathscr{N}$が在存して$\|x-y\|$が有限である．すなわち

$$\|x\|=\|(x-y)+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$$

† S. Banach (1892-1945)

となりやはり有限である. □

すでに知られていることであるが, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in {}^*\mathcal{N}$ について

$$x_1 \approx x_2,\ y_1 \approx y_2 \ \text{ならば}\ x_1 + y_1 \approx x_2 + y_2$$

であり, また $\alpha \in {}^*D$ が有限であれば

$$x_1 \approx x_2 \ \text{ならば}\ \alpha x_1 \approx \alpha x_2$$

であった.

$x \in {}^*\mathcal{N}$ に対して $x \approx y \in \mathcal{N}$ となるものが在存するときは $y = {}^\circ x$ と記すことも, 3章5節の記法に合っている.

定理 1.4 $B \subseteq \mathcal{N}$ が有界であるための必要十分条件は, $M \in R$ が存在して, すべての $x \in B$ に対して $\|x\| \leq M$ となることである.

証明 B が有界とすれば定義より, $x_0 \in \mathcal{N}$ および $M \in R$ が存在して, すべての $x \in B$ について $\|x - x_0\| \leq M_0$ である. したがって, すべての $x \in B$ について

$$\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq M_0 + \|x_0\|$$

となる. 逆は明らかである. □

定義 $\mathcal{N}$ および $\mathcal{M}$ を同一の体 D のノルム線形空間とするとき, $\mathcal{N}$ から $\mathcal{M}$ への函数 T は次の条件が満足されるとき, **線形作用素** (linear operator) とよばれる. すなわち,

(1) $x, y \in \mathcal{N}$ ならば $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(2) $x \in \mathcal{N}, \alpha \in D$ ならば $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

特に $\mathcal{M} = D$ となる場合は, T は**線形汎函数** (linear functional) とよばれる.

$T(x)$ はしばしば単に Tx と記される. そしてもちろん ${}^*T$ (これも通常単に T と記される) は ${}^*\mathcal{N}$ から ${}^*\mathcal{M}$ への写像であり, 性質(1), (2)が満足される.

定理 1.5 T を $\mathcal{N}$ 上の線形作用素で点 $x_0 \in \mathcal{N}$ で連続とすると, T は $\mathcal{N}$ 上で一様連続である.

証明 定理3-7.1によって T が ${}^*\mathcal{N}$ 上で局所連続であることを示せばよい. そこで $x, y \in {}^*\mathcal{N}, x \approx y$ とする. $x_0 = x_0 + 0 \approx x_0 + (x - y)$ であるから

$$T(x_0) \approx T(x_0 + x - y) = T(x_0) + T(x) - T(y)$$

である. すなわち $T(x) \approx T(y)$ である. □

定義 線形作用素 T について, ある $M \in R$ が存在して, すべての $x \in \mathcal{N}$ について

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

が成立するとき, **有界** (bounded) であるという.

この節では，これより後 T なる文字は線形作用素を表わすものとする．

定理 1.6　T が有界であるための必要十分条件は

$$\{Tx \mid x \in \mathscr{N}, \|x\|=1\}$$

が有界集合となることである．

証明　$A=\{Tx \mid x \in \mathscr{N}, \|x\|=1\}$ とする．T が有界，すなわちすべての $x \in \mathscr{N}$ について $\|Tx\| \leq M\|x\|$ とすると，すべての $y \in A$ について，$y=Tx, \|x\|=1$ なる x がある．したがって

$$\|y\|=\|Tx\| \leq M\|x\|=M$$

これより A は有界である．

逆に，もし A が有界であれば $y \in A$ ならば $\|y\| \leq M$ となる $M \in R^{+}$ が存在する．示すべきことは，すべての $x \in \mathscr{N}$ について $\|Tx\| \leq M\|x\|$ となることがあるが，$x=0$ のときは明らかである．$x \neq 0$ のときは $u=x/\|x\|$ とすると $y=Tu=Tx/\|x\|$ であり，$\|u\|=1$ より $y \in A$ である．したがって $\|y\| \leq M$，すなわち $\|Tx\| \leq M\|x\|$．□

この議論の最後の部分の M は A の上界であれば何でもよかったので，もし有界な作用素 T について

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

と定義すると，

系 1.7　任意の有界作用素 T について

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$$

が成立する．

次に，線形作用素の有界性の超準解析での判定法について述べておこう．これについては

$$A=\{Tx \mid x \in \mathscr{N}, \|x\|=1\}$$

と記すと，T と A は同時に有界でないか，または同時に有界という具合になっている．そこで

$$B=\{x \in \mathscr{N} \mid \|x\|=1\}$$

とすると，$A=T[B]$ であるから，定理 1-7.13 によって ${}^*A=T[{}^*B]$ である．したがって，

$${}^*A=\{Tx \mid x \in {}^*\mathscr{N}, \|x\|=1\} \tag{‡}$$

定理 1.8　T が有界作用素であるための必要十分条件は，T が有限点を有

限点に写すことである．

証明　T を有界とすると，$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ であり，定理1.3によって x が有限点なら Tx も有限点である．逆に，T が有限点を有限点に写すならば，すべての $x \in {}^*B$ について $\|x\|=1$ であるから x は有限点，したがって仮定より Tx は有限点である．したがって(‡)により ${}^*A$ の点は有限点である．定理3-5.4により A は有界であり，定理1.6によって T は有界となる．□

定理 1.9　T が有界であることと T が連続であることは同値である．

証明　T が有界で，例えば $\|Tx\| \leq M\|x\|$ とする．定理1.5によって点0で連続であることを示せばよい．しかし $\|x\| \approx 0$ ならば $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\| \approx 0$ となる．

逆に，T は $\mathscr{N}$ 上で連続で有界でないとする．定理1.6によって，A は有界でないので，${}^*A$ は無限大の元を含む．すなわち，性質(‡)によって，ある $x \in {}^*\mathscr{N}$ について $\|x\|=1$ であるが Tx は無限大となる．そこで

$$y = x/\|Tx\|$$

とおくと，$\|y\| = \|x\|/\|Tx\| \approx 0$ であるが，$\|Ty\|=1$ であるので T が0で連続であることに反する．□

定理 1.10　T が有界であることと，T が近準点を近準点に写すことは同値である．

証明　T を有界とし，$x \approx s \in \mathscr{N}$ とする．T は連続であるから $Tx \approx Ts \in \mathscr{N}$ となり Tx は近準点である．

逆に，T は近準点を近準点に写し，有界でないとする．性質(‡)によって，$x \in {}^*\mathscr{N}$, $\|x\|=1$ で Tx は無限大となるものが存在する．

$$y = x/\|Tx\|^{\frac{1}{2}}$$

とおくと，$y \approx 0$ で近準点であるけれども

$$\|Ty\| = \|Tx\|/\|Tx\|^{\frac{1}{2}} = \|Tx\|^{\frac{1}{2}}$$

となり無限大となる．これは Ty が近準点でないことを意味し仮定に反する．□

T_1 および T_2 が線形ノルム空間 $\mathscr{N}$ から線形ノルム空間 $\mathscr{M}$ への線形作用素とし，$\alpha \in D$ とする．このとき，自然に

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x$$

$$(\alpha T_1)x = \alpha(T_1 x)$$

によって，T_1+T_2, αT_1 と記される作用素が定義できる．これらが線形作用素であることは，よく知られている通り簡単に確かめられる．そしてもちろん，T_1-T_2 は $T_1+(-1)T_2$ のことで $(T_1-T_2)x=T_1x-T_2x$ である．

次の性質を得る．

定理 1.11 T_1, T_2 を $\mathscr{N}$ から $\mathscr{N}$ への有界線形作用素とし，$\alpha\in D$ とする．このとき，T_1+T_2, αT_1 および T_1T_2 は有界線形作用素で次の性質をもつ：

$$\|T_1+T_2\|\leq\|T_1\|+\|T_2\|$$
$$\|\alpha T_1\|=|\alpha|\cdot\|T_1\|$$
$$\|T_1\cdot T_2\|\leq\|T_1\|\cdot\|T_2\|.$$

証明 関係

$$\begin{aligned}\|(T_1+T_2)x\|&\leq\|T_1x\|+\|T_2x\|\\&\leq\|T_1\|\cdot\|x\|+\|T_2\|\cdot\|x\|\\&\leq(\|T_1\|+\|T_2\|)\cdot\|x\|\end{aligned}$$

によって T_1+T_2 は有界であり，$\|T_1+T_2\|\leq\|T_1\|+\|T_2\|$ となる．

$$\|\alpha T_1x\|=|\alpha|\cdot\|T_1x\|$$

であるから αT_1 は有界で $\|\alpha T_1\|\leq|\alpha|\cdot\|T_1\|$ であり，さらに

$$\|\alpha T_1\|=\sup_{\|x\|=1}\|\alpha T_1x\|=|\alpha|\cdot\sup_{\|x\|=1}\|T_1x\|=|\alpha|\cdot\|T_1\|$$

そして最後に

$$\begin{aligned}\|(T_1\cdot T_2)x\|&=\|T_1(T_2x)\|\\&\leq\|T_1\|\cdot\|T_2x\|\leq\|T_1\|\cdot\|T_2\|\cdot\|x\|\end{aligned}$$

によって T_1T_2 は有界で，$\|T_1T_2\|\leq\|T_1\|\cdot\|T_2\|$ である． □

定理 1.12 $B=\{x\,|\,\|x\|=1\}$ とし，T_n および T を有界線形作用素として，$\|T_n-T\|\to0$ とすれば，B 上で $T_n\Rightarrow T$ である．

証明 $x\in B$ に対しては

$$\begin{aligned}\|T_nx-Tx\|&=\|(T_n-T)x\|\\&\leq\|T_n-T\|\cdot\|x\|\leq\|T_n-T\|\end{aligned}$$

であるから所要の結果を得る． □

定理 1.13 T を $\mathscr{N}$ 上の有界線形作用素とし

$$\mathscr{M}=\{x\in\mathscr{N}\,|\,Tx=0\}$$

とおくと $\mathscr{M}$ は $\mathscr{N}$ の**閉部分空間**(closed linear subspace) である．

証明 $x, y\in\mathscr{M}$, $\lambda\in D$ とすると，

$$T(x+y)=Tx+Ty=0$$
$$T(\lambda x)=\lambda Tx=0$$

であるから, $x+y$ および λx は $\mathscr{M}$ に属する. すなわち $\mathscr{M}$ は $\mathscr{N}$ の線形部分空間である.

$\mathscr{M}$ が閉集合でもあることをみるには, $x\in{}^*\mathscr{M}$, $x\approx y\in\mathscr{N}$ とすると, $Tx=0$ かつ $Tx\approx Ty$ であるから $Ty\in\mathscr{N}$ に注意すれば $Ty=0$ となり $y\in\mathscr{M}$ を得る. □

特別な場合として, n 次元ユークリッド空間† $\mathscr{N}=R^n$ についてふれておく. これは, 成分ごとの和とスカラー積によって R 上の線形空間となっている.

ユークリッドのノルムは $x=\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ のとき,

$$\|x\|=(a_1{}^2+\cdots+a_n{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

であり, このノルムが三角不等式を満足することは, (ミンコウスキー††の不等式として) よく知られた初歩的な不等式である.

定理 1.14 すべての $^*R^n$ の有界点は近準点である.

証明 $\|x\|=(a_1{}^2+\cdots+a_n{}^2)^{\frac{1}{2}}$ が有限とすると, $|a_1|, \cdots, |a_n|$ も有限である. よって, $i=1, 2, \cdots, n$ について $b_i={}^\circ(a_i)$ とおくと, $y=\langle b_1, \cdots, b_n\rangle$ について

$$\|x-y\|=((a_1-b_1)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2)^{\frac{1}{2}}\approx 0$$

すなわち, $x\approx y$ である. □

定理3-5.6によって, すべての有界閉集合はコンパクトであることがわかる. これはハイネ・ボレルおよびボルツァノ・ワイヤストラスの定理 (定理3-5.12) が R^n で成立することを意味している.

---

†[訳注] Euclid (333?-275? B.C.) 一部はメソポタミアの代数学にその起源を有するともいうStoicheiaの原本で有名. 平行線公理, 素数の無限性, Euclidの互除法, Eratosthenesのふるい等も含まれている. ルネサンスに至って多くの発見の大きな原動力となった.

††[訳注] H. Minkowski (1864-1909) の不等式 : $p\geqq 1$ のとき

$$(\sum|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum|b_i|^p)^{\frac{1}{p}}\geq(\sum|a_i+b_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

彼は, 格子点と凸集合の概念に着目して整数論に新しい証明法を導入したり, 非同次のLorentz群に着目し, 特殊相対論に幾何学的に明解な意味を与えた. またD. Hilbertとは生涯親しい友人であったという.

2. コンパクト作用素

定義 T が**コンパクト作用素** (compact operator) とは，T が

（1） 線形ノルム空間 $\mathscr{N}$ 上の線形作用素であって，

（2） $\mathscr{N}$ 上のコンパクトな写像である．

の二条件を満足することをいう．

定理3-8.1によりただちに次のものを得る．

定理 2.1 線形作用素 T がコンパクトであるための必要十分条件は，T が有限点を近準点に写すことである．

特に，近準点は有限点であるから，定理1.8によって

系 2.2 線形作用素 T がコンパクトであれば，T は有界作用素である．

定理 2.3 T_n をバナッハ空間 $\mathscr{N}$ からそれ自身へのコンパクト作用素の列とする．$\|T_n-T\|\to 0$ であれば T はコンパクト作用素である．

証明 $B=\{x\in\mathscr{N}\,|\,\|x\|\leqq 1\}$ とおく．定理1.12によって $T_n\Rightarrow T$ が B 上で成立する．したがって，定理3-8.2より T は B から $\mathscr{N}$ への写像としてコンパクトである．このことを用いて T が $\mathscr{N}$ 上のコンパクト作用素であることを示す．

x を ${}^*\mathscr{N}$ の有限点とする．示すべきことは Tx が近準点となることである．$r\in R^+$ を $\|x\|\leq r$ とし，$y=x/r$ とおくと，$\|y\|=\|x\|/r\leq 1$，すなわち $y\in{}^*B$ である．T は B 上でコンパクトであるから，Ty は近準点である．例えば $Ty\approx z\in\mathscr{N}$ とすると，

$$Tx=rTy\approx rz$$

となり Tx は実際に近準点となる．□

この節を終るに当ってコンパクト作用素の重要な例，すなわちフレッドホルムの積分作用素について考察しておこう．

これらの作用素のコンパクト性の証明には通常アルツェラ・アスリコの定理が用いられる．我々は実際には，アルツェラ・アスコリの定理を示すときに用いられた近似定理3-7.6を用いる．

$\mathscr{C}$ で $[0,1]$ 上の実数値連続函数の全体の集合とする．$f\in\mathscr{C}$ に対して

$$\|f\|=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$

とおく．よく知られている通り，簡単に $\mathscr{C}$ は自然の意味での $f+g$, αf および上記ノルムに関してバナッハ空間となる．（特に完備性については，$\{f_n|n\in$

$N^+\}$ がコーシー列，すなわち $n, m\to\infty$ ならば $\|f_n-f_m\|\to 0$ と仮定すれば，すべての $x\in[0,1]$ について $|f_n(x)-f_m(x)|\le\|f_n-f_m\|$ であるから，ある $f\in\mathscr{C}$ について $f_n\Rightarrow f$ となる).

K を $[0,1]\times[0,1]$ から R への一つの固定された連続函数とする．K を核とする**フレッドホルム**[†]**積分作用素** (Fredholm operator with kernel K) T とは，$\phi\in\mathscr{C}$ に対して

$$\psi(x)=\int_0^1 K(x,t)\phi(t)dt$$

なる ψ を対応させる函数 T をいう.

T が $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ へのコンパクトな作用素であることを示すのであるが，最初に $T\phi=\psi$ ならば $\psi\in\mathscr{C}$ となることを示す．そこで $x, y\in[0,1]$ とすると

$$\begin{aligned}|\psi(x)-\psi(y)|&=\left|\int_0^1 (K(x,t)-K(y,t))\phi(t)dt\right|\\&\le\|\phi\|\cdot\int_0^1|K(x,t)-K(y,t)|dt\\&\le\|\phi\|\cdot\max_{0\le t\le 1}|K(x,t)-K(y,t)|\end{aligned}$$

である．そこで $x, y\in{}^*[0,1], x\approx y$ とすると，上の不等式より $\psi(x)\approx\psi(y)$ となる．すなわち ψ は ${}^*[0,1]$ 上で局所連続である．よって $\psi\in\mathscr{C}$ である．これは T が $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への写像であることを示している.

次に ${}^*\mathscr{C}$ については，$\alpha(\mathbf{v})$ を論理式

v は [0, 1] から R への函数で，[0, 1] 上で連続

とすれば，$\mathscr{C}=\{f\in v\,|\,\models\alpha(\mathbf{f})\}$ である．すなわち ${}^*\mathscr{C}=\{f\in{}^*U\,|\,*\models{}^*\alpha(\mathbf{f})\}$ となる．これは $f\in{}^*\mathscr{C}$ であることが，f が ${}^*[0,1]$ から ${}^*R$ への内函数で $*$ 連続となることを意味している．これより ${}^*T$ は ${}^*\mathscr{C}$ から ${}^*\mathscr{C}$ への写像である．移行原理と前述の不等式によって，$\phi\in{}^*\mathscr{C}, \psi=T\phi$ について

$$|\psi(x)-\psi(y)|\le\|\phi\|\cdot\max_{t\in{}^*[0,1]}|K(x,t)-K(y,t)|$$

であるから，次の性質を得る.

補題 1.　$\phi\in{}^*\mathscr{C}$ を有限 (すなわち $\|\phi\|$ が有限) とし，$\psi=T\phi$ とすれば，ψ は ${}^*[0,1]$ 上で局所連続である.

T は明らかに $\mathscr{C}$ からそれ自身の中への線形変換である．それは

---

†[訳注]　E. I. Fredholm (1866-1927)　例えば $\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$ のような積分方程式の解法を研究し，Fredholm の行列式等の概念を導入した.

$$T(\phi_1+\phi_2)=\int_0^1 K(x,t)(\phi_1(t)+\phi_2(t))dt$$
$$=\int_0^1 K(x,t)\phi_1(t)dt+\int_0^1 K(x,t)\phi_2(t)dt$$
$$=T\phi_1+T\phi_2$$
$$T(\alpha\phi)=\int_0^1 K(x,t)\alpha\phi(t)dt$$
$$=\alpha\int_0^1 K(x,t)\chi(t)dt$$
$$=\alpha T\phi$$

また，$\psi=T\phi$ とすれば，すべての $x\in[0,1]$ について

$$|\psi(x)|\leq\|\phi\|\cdot\int_0^1|K(x,t)|dt$$
$$\leq\|\phi\|\cdot\max_{0\leq t\leq 1}|K(x,t)|$$
$$\leq M\cdot\|\phi\|$$

ここに

$$M=\max_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}}|K(x,y)|$$

となる．すなわち $\|\psi\|\leq M\cdot\|\phi\|$，すなわち T は有界であって $\|T\|\leq M$.

終わりに，次のことを示しておく

定理 2.4　T は $\mathscr{C}$ 上のコンパクト線形作用素である．

証明　定理2.1によって，$\phi\in{}^*\mathscr{C}$ が有限ならば $T\phi$ が近準点であることを示せば十分である．そこで $\psi=T\phi$ とすると ψ は局所連続である．これより，

補題 2.　すべての $x\in{}^*[0,1]$ に対して $\psi(x)$ は近準点である．

証明　移行原理を用いる．

$$|\psi(x)|\leq\|\psi\|\leq\|T\|\cdot\|\phi\|$$

によって $\psi(x)$ は有限である．したがって，すべての $x\in{}^*[0,1]$ について $\psi(x)$ は近準点である．□

定理の証明を完成するために，補題2と近似定理3-7.6を用いる．$x\in[0,1]$ に対して $\tilde{\varphi}(x)={}^\circ(\chi(x))$ とすると，すべての $x\in{}^*[0,1]$ について $\tilde{\varphi}(x)\approx\psi(x)$ となる．すなわち

$$\|\tilde{\varphi}-\psi\|=\max_{x\in{}^*[0,1]}|\tilde{\varphi}(x)-\psi(x)|\approx 0$$

となり $\psi\approx\tilde{\varphi}$ を得る．これは ψ が近準点であることを意味している．□

3. バナッハ空間に値をもつ函数の積分

$a, b \in R$ で $a<b$ のとき，$J=[a, b]$ とし，$\mathscr{B}$ を一つのバナッハ空間とする．また $J^{-}=J-\{b\}$ と記す．そして $\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ で J で定義され $\mathscr{B}$ に値を有する連続函数の全体の集合とする. 容易なことであるが, $\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ はそれ自身, 函数としての和，スカラー積およびノルム

$$\|f\|=\sup_{x\in J}\|f(x)\|=\max_{x\in J}\|f(x)\|$$

について一つのバナッハ空間となることがわかる.

我々は積分 $\int_a^b$ を $\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ から $\mathscr{B}$ への線形作用素と考えて，その理論を展開しようとしているわけである.

定義 J 上の階段函数 s とは J^{-} から $\mathscr{B}$ への函数で

$$x_{i-1}\leq x\leq x_i \text{ のとき } s(x)=r_{i-1}, (i=1, \cdots, n)$$

となるものをいう．ここに $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ であり $\{r_i|0\leq i<n\}$ は $\mathscr{B}$ の点の有限列である.

まず，階段函数の積分より始めることにする.

定義 s を J 上の階段函数とするとき

$$\int_a^b s(x)dx=\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}(x_i-x_{i-1})$$

と定義する.

ここで重要なことは積分 $\int_a^b s(x)dx$ は函数 s のみに関係していて，s の定義には関係していないということである．すなわち

$$s(x)=r_{i-1}, x_{i-1}\leq x<x_i \ (i=1, \cdots, n)$$

ここに $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ とする．このとき，同一の函数 s はある j に対して x_{j-1} と x_j の間に ξ を入れて

$$s(x)=\begin{cases} r_{j-1}, & x_{j-1}\leq x<\xi \text{ のとき}, \\ r_{j-1}, & \xi\leq x<x_i \text{ のとき}, \end{cases}$$

とも記すことができる．さてこのとき，

$$r_{j-1}(x_j-x_{f-1}) \quad \text{は} \quad r_{j-1}(x_j-\xi)+r_{j-1}(\xi-x_{j-1})$$

で置換えられるが，積分の定義である和は変らない．このようなことを何回も繰り返すと，任意有限個の分割点を加えても $\int_a^b s(x)dx$ の値は不変である．さ

て二つの異なる分割が与えられたとすると，その両方の分割点より成る分割を考えれば，その各々より得られた積分に等しく，したがって両方の和は等しいことになる．

$\mathscr{S}$ で J 上の階段函数の全体の集合を記する．$s\in\mathscr{S}$ に対して s の**ノルム** (norm) を次のように定める．

$$\|s\|=\sup_{x\in J}\|s(x)\|=\max_{0\leq i\leq n}\|r_i\|$$

補題 1． $\mathscr{S}$ は $s+t, \alpha s$ および上記ノルムに関して線形ノルム空間であり，積分 $\int_a^b$ は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{B}$ への有界線形作用素である．

証明　s および t を階段函数とすると $s+t, \alpha s$ も明らかに階段函数である．ノルムに関しては，

$$\begin{aligned}\|s+t\|&=\sup_{x\in J}\|s(x)+t(x)\|\\&\leq\sup_{x\in J}(\|s(x)\|+\|t(x)\|)\\&\leq\sup_{x\in J}\|s(x)\|+\sup_{x\in J}\|t(x)\|\\&=\|s\|+\|t\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\alpha s\|&=\sup_{x\in J}\|\alpha s(x)\|\\&=|\alpha|\cdot\sup_{x\in J}\|s(x)\|\\&=|\alpha|\cdot\|s\|.\end{aligned}$$

そして $\|s\|=0$ ならば，明らかにすべての x について $s(x)=0$ を意味するから $s=0$ となる．

明らかに

$$\begin{aligned}\int_a^b\alpha s(x)dx&=\sum_{i=1}^n\alpha r_{i-1}(x_i-x_{i-1})\\&=\alpha\int_a^b s(x)dx\end{aligned}$$

また，性質

$$\int_a^b s(x)+t(x)dx=\int_a^b s(x)dx+\int_a^b t(x)dx$$

についても両方の函数を同時に定める分割を考えれば同様にして得られる．終りに

$$\left\|\int_a^b s(x)dx\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n} r_{i-1}(x_i-x_{i-1})\right\|\leq\sum_{i=1}^{n}\|r_{i-1}\|(x_i-x_{i-1})$$
$$\leq\|s\|\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=(b-a)\cdot\|s\|$$

となるので，$\int_a^b$ は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{B}$ の中への有界線形作用素である．□

次に $^*\mathscr{S}$ を計算しておく必要がある．このために $\mathscr{S}$ について正確に調べておく．そこで，

$$\sigma_n=\{m\in N\,|\,m\leq n\}$$

とおくと，σ は N から $\mathscr{P}(N)$ への写像であり，したがって $\sigma\in U$ である．A の元の有限列とは，ある $n\in N$ に対して σ_n から $A\,(\subseteq S$ として$)$ への写像となることである．さて各 $s\in\mathscr{S}$ に対しては $n\in N^+$ が存在して，σ_n を J の中に写し，$x_0=a,\ x_n=b,\ 0\leq i<n$ に対して $x_i<x_{i+1}$ となる有限列 x と，σ_{n-1} を $\mathscr{B}$ の中に写す有限列 r の対がきまる．

移行原理によって $^*\sigma$ は $^*N$ から $^*\mathscr{P}(N)$ への函数であり，定理1-7.12によって，すべての $n\in{}^*N$ について $(^*\sigma)_n=\{m\in{}^*N\,|\,m\leq n\}$ である．すべての $n\in N$ について $(^*\sigma)_n=\sigma_n$ であるから，例によって $*$ を略記する（異なっているところは $\sigma(N)\subsetneqq S$）．移行原理によって $^*\mathscr{S}$ の元 s は次のように与えられる．

（1） $n\in{}^*N^+$ なる元

（2） σ_n から $^*J$ への内函数 x で

$$x_0=a,\ x_n=b,\ 0\leq i<n\ \text{について}\ x_i<x_{i+1}$$

（3） σ_{n-1} から $^*\mathscr{B}$ への内函数 r で

$$x^{\dagger}\in{}^*J,\ x_{i-1}\leq x<x_i,\ 1\leq i\leq n\ \text{について}\ s(x)=r_{i-1}$$

このとき $s\in{}^*\mathscr{S}$ に対して（移行原理を用いて）

（1） $x\in{}^*J^-$ に対して $\|s(x)\|\leq\|s\|$

（2） すべての正の超実数 δ に対し，$x\in{}^*J^-$ が存在して $\|s(x)\|>\|s\|-\delta$.

すなわち，$\|s\|\approx 0$ となるのはすべての $x\in{}^*J^-$ に対して $s(x)\approx 0$ のときに限る．それゆえに $s_1, s_2\in{}^*\mathscr{S}$ について $s_1\approx s_2$ と $\|s_1-s_2\|\approx 0$ は同値で，それはすべての $x\in{}^*J^-$ について $s_1(x)\approx s_2(x)$ とも同値である．

---

† 有限列としての x と $^*J$ の元としての x が同一文字で記されているので注意すること．

$\int_a^b$ は $\mathscr{S}$ から $\mathscr{B}$ への線形写像であるから，$^*\int_a^b$ は $^*\mathscr{S}$ から $\mathscr{B}$ への線形写像である．$s\in{}^*\mathscr{S}$ とすると，$n\in{}^*N$ が存在して

$$x_{i-1}\leq x<x_i, 1\leq i\leq n \quad \text{ならば} \quad s(x)=r_{i-1}$$

であり，例として x, r は内的となる．移行原理によって

$$^*\int_a^b s(x)dx=\sum_{i=1}^n r_{i-1}(x_i-x_{i-1})$$

であり，特に $\mathscr{S}$ 上では $^*\int_a^b$ と $\int_a^b$ は一致する値をもつので，例によって $^*\int_a^b$ の＊は省略することにする．

$\int_a^b$ は有界線形作用素であるから $\int_a^b$ は $^*\mathscr{S}$ 上局所連続である．すなわち

$$s_1\approx s_2 \text{ ならば } \int_a^b s_1(x)dx\approx\int_a^b s_2(x)dx$$

となる．これに関して次の結果は本質的である．

定理 3.1 $f\in\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ とする．このとき，$s\in{}^*\mathscr{S}$ が存在して，すべての $x\in{}^*J^-$ に対して $f(x)\approx s(x)$ であり，$\int_a^b s(x)dx$ は近準点である．

証明 定理2-5.5の証明におけると同様に，$N\times N$ から J の中への次のような函数 t を考える．すなわち $0\leq i<n$ について

$$t(n, i)=t_i^{(n)}=a+\frac{b-a}{n}i$$

そして s についても，$t_i^{(n)}\leq x<t_{i+1}^{(n)}, 0\leq i<n$ について

$$s(n, x)=s_n(x)=f(t_i^{(n)})$$

とする．このようにすると，すべての $n\in{}^*N^+$ に対して $s_n\in{}^*\mathscr{S}$ となる．特に $\nu\in{}^*N-N$ とすると，$t_{i+1}^{(\nu)}-t_i^{(\nu)}=\dfrac{b-a}{\nu}\approx 0$ であるから，

$$t_i^{(\nu)}\leq x<t_{i+1}^{(\nu)} \text{ ならば } x\approx t_i^{(\nu)}$$

となる．したがって（f はコンパクト集合 J 上で一様連続であったから）

$$f(x)\approx f(t_i^{(\nu)})=s_\nu(x)$$

となる．証明すべきことで残っていることは $\int_a^b s_\nu(x)dx$ が近準点となることである．

そこで $n\in N^+$ に対して $I_n=\int_a^b s_n(x)dx$ とおく．移行原理によって，$n\in$

${}^*N^+$ に対しても $I_n=\int_a^b s_n(x)dx$ となる．今，$\nu,\mu\in{}^*N-N$ とすると，すでに示されているように，すべての $x\in{}^*J^-$ について

$$s_\nu(x)\approx f(x)\approx s_\mu(x)$$

であるから，$s_\nu\approx s_\mu$ となる．$\int_a^b$ の局所連続性によって $I_\nu\approx I_\mu$ を得る．これは $\{I_n|n\in N^+\}$ がコーシー列となることを意味している．$\mathscr{B}$ はバナッハ空間（したがって完備）であったから，$I\in\mathscr{B}$ が存在して，すべての $\nu\in{}^*N-N$ に対して $I_\nu\approx I$ となる．すなわち I_ν は近準点である．□

定理 3.2　$s_1,s_2\in{}^*\mathscr{S}, f\in\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ として，すべての $x\in{}^*J^-$ について $s_1(x)\approx f(x), s_2(x)\approx f(x)$ ならば，$\int_a^b s_1(x)dx\approx\int_a^b s_2(x)dx$ となる．

証明　仮定によって $s_1\approx s_2$ であるから，$\int_a^b$ の局所連続性によって所要の結果が得られる．□

これら二つの定理によって次のように定義できる．

定義　$f\in\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ に対して

$$\int_a^b f(x)dx={}^\circ\left(\int_a^b s(x)dx\right)$$

とする．ここに $s\in{}^*\mathscr{S}$ であり，すべての $x\in{}^*J^-$ について $s(x)\approx f(x)$ を満足するものとする．

次のような性質が必要となる：

補題 2.　$f\in\mathscr{C}[\mathscr{B}], s\in{}^*\mathscr{S}$ とし，すべての $x\in{}^*J^-$ に対して $s(x)\approx f(x)$ とすると $\|f\|={}^\circ\|s\|$ である．

証明　ある $\xi\in{}^*J^-$ について $\|s\|=\|s(\xi)\|$ とする．いま，$t={}^\circ\xi$ とすれば $f(t)\approx f(\xi)\approx s(\xi)$ である．よって $\|f(t)\|\approx\|s(\xi)\|=\|s\|$，すなわち $\|f(t)\|={}^\circ\|s\|$ である．さて，$x\in J^-$ とすると $\|s\|\geq\|s(x)\|$ であるから，標準部分をとると $\|f(t)\|\geq\|f(x)\|$．この関係は連続性によって $x=b$ においても成立するので，すべての $x\in J$ について成立する．したがって $\|f\|=\|f(t)\|={}^\circ\|s\|$ となる．□

定理 3.3　$\int_a^b$ は $\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ から $\mathscr{B}$ への有界線形作用素であり

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|\leq(b-a)\cdot\|f\|$$

が成立する．

証明　$f_1, f_2 \in \mathscr{C}[\mathscr{B}]$, $s_1, s_2 \in {}^*\mathscr{S}$ とし，すべての $x \in {}^*J^-$ に対して $f_1(x) \approx s_1(x)$, $f_2(x) \approx s_2(x)$ とする．このときは $f_1(x)+f_2(x) \approx s_1(x)+s_2(x)$ であって

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = {}^\circ\left(\int_a^b (s_1(x)+s_2(x))\,dx\right)$$
$$= {}^\circ\left(\int_a^b s_1(x)\,dx\right) + {}^\circ\left(\int_a^b s_2(x)\,dx\right)$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

同様にして

$$\int_a^b \alpha f_1(x)\,dx = {}^\circ\left(\int_a^b \alpha s_1(x)\,dx\right)$$
$$= \alpha\,{}^\circ\left(\int_a^b s_1(x)\,dx\right)$$
$$= \alpha \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

終りに，補題 1, 2 を用いると

$$\left\|\int_a^b f_1(x)\,dx\right\| = {}^\circ\left\|\int_a^b s_1(x)\,dx\right\|$$
$$\leq (b-a)\cdot{}^\circ\|s_1\|$$
$$= (b-a)\cdot\|f_1\|$$

である．□

定理 3.4
$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

証明　$f(x)=k$ とすると f は階段函数である．□

定理 3.5　α を J から R への連続函数とし，$k \in \mathscr{B}$ とすると

$$\int_a^b k\,\alpha(x)\,dx = k\int_a^b \alpha(x)\,dx$$

証明　$x_{i-1} \leq x < x_i$, $1 \leq i \leq \nu$ に対して $s(x)=r_{i-1}$ で，すべての $x \in {}^*J^-$ について $s(x) \approx \alpha(x)$ とすると $ks(x) \approx k\alpha(x)$ でもある．よって

$$\int_a^b k\alpha(x)\,dx \approx \int_a^b ks(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\nu} kr_{i-1}(x_i - x_{i-1})$$
$$= k\sum_{i=1}^{\nu} r_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \approx k\int_a^b \alpha(x)\,dx.\quad \square$$

定理 3.6 $u \in \mathscr{C}[\mathscr{B}]$ とし，f を $\mathscr{B}$ 上の有界線形作用素とすると

$$f\left(\int_a^b u(x)\,dx\right)=\int_a^b f(u(x))\,dx.$$

証明 $x_{i-1}\leq x<x_i,\ 1\leq i\leq \nu$ に対して $s(x)=r_{i-1}$ で，すべての $x\in {}^*J^-$ について $s(x)\approx u(x)$ とする．f は局所連続であるから $f(u(x))\approx f(s(x))$ である．そして

$$\int_a^b u(x)\,dx\approx\int_a^b s(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\nu} r_{i-1}(x_i-x_{i-1})$$

であるから，f が連続で線形なことを用いると

$$f\left(\int_a^b u(x)\,dx\right)\approx f\left(\sum_{i=1}^{\nu} r_{i-1}(x_i-x_{i-1})\right)=\sum_{i=1}^{\nu} f(r_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$
$$=\int_a^b f(s(x))\,dx\approx\int_a^b f(u(x))\,dx.\quad \square$$

連続函数の積分の順序の交換可能性はこの定理の直接の結果である．

系 3.7 f を $[a,b]\times[c,d]$ から R への連続函数とすると

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx.$$

証明 $\mathscr{B}=R$ とすると，$\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ は J 上の実数値連続函数の空間である．F を $\mathscr{C}[\mathscr{B}]$ 上の有界線形作用素で

$$F(\alpha)=\int_c^d \alpha(y)\,dy$$

によって定められたものとする．定理にいうところは

$$F\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)=\int_a^b F(f(x,y))\,dx$$

である．これが所要のものである．$\square$

4. 微 分 法

この節では第2章での微分法を一般化して取扱ってみよう．

すなわち，$\mathscr{N}$ および $\mathscr{M}$ を同一の体 D 上の線形ノルム空間とする．(例によって D としては R とか C を考える) $I_{\mathscr{N}}$ とか $I_{\mathscr{M}}$ でそれぞれ $\mathscr{N}$ とか $\mathscr{M}$ の無限小元の集合とする．

明らかな性質として

(1) $x, y\in I_{\mathscr{N}}$ ならば $x+y\in I_{\mathscr{N}}$

(2) $x\in I_{\mathscr{N}},\ \alpha\in {}^*D$ ならば $\alpha x\in I_{\mathscr{N}}$.

定義　f を内函数とし，その定義域は $^*\mathscr{N}$ の部分集合，値域は $^*\mathscr{M}$ の部分集合となるものとする．$f[I_{\mathscr{N}}]\subseteq I_{\mathscr{M}}$ が成立するとき，f は**局所函数**(local map) とよばれる．

f, g を局所函数として，すべての $x\in I_{\mathscr{N}}$, $x\neq 0$ について

$$\frac{f(x)-g(x)}{\|x\|}\approx 0$$

が成立するとき，$f\sim g$ と記す．もちろん，関係 $\sim$ は一つの同値関係であって，$f\sim g$ のとき f と g は**同値**(equivalent) であるという．

特別の場合として $\mathscr{N}=\mathscr{M}=R$ のときは，この関係は

$$f(x)=g(x)+\alpha(x)\cdot\|x\|$$

と書かれ，$x\in I_{\mathscr{N}}$ ならば $\alpha(x)\approx 0$ ということである．すなわち α は一つの局所函数となっている．

定義　局所函数 f は次の条件

(1)　$x, y\in I_{\mathscr{N}}$ ならば $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(2)　$x\in I_{\mathscr{N}}, \alpha\in {}^*D$ が有限 ならば $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

を満足するとき，**局所線形**(locally linear) とよばれる．

定理 4.1　f を局所線形写像とすると，$^*\mathscr{N}$ から $^*\mathscr{M}$ への一意的な内的線形作用素 T が存在して，$x\in I_{\mathscr{N}}$ ならば $f(x)=Tx$ となる．さらに $\|T\|$ は有限である．

証明　$\alpha, \beta\in {}^*D$ を 0 でない無限小元とし，$x\in {}^*\mathscr{N}$ について $\alpha x, \beta x\approx 0$ ならば

$$\frac{f(\alpha x)}{\alpha}=\frac{\beta f(\alpha x)}{\alpha\beta}=\frac{f(\beta\alpha x)}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{\alpha f(\beta x)}{\alpha\beta}=\frac{f(\beta x)}{\beta} \tag{‡}$$

である．ν を無限大整数とすると，$x\in {}^*\mathscr{N}$ ならば $x/\nu\|x\|\approx 0$ である．よって $x\neq 0$ については

$$Tx=\nu\|x\|f\left(\frac{x}{\nu\|x\|}\right)$$

で $T_0=0$ と定義すると，T は内函数（定理 1-8.9 による）であり，性質 (‡) によって，すべての $x\alpha\approx 0$ となる有限の α について

$$Tx=\frac{f(\alpha x)}{\alpha}$$

である．特に $x\in I_{\mathscr{N}}$ ならば，すべての $\alpha\approx 0$ について

$$Tx=\frac{f(\alpha x)}{\alpha}=\frac{\alpha f(x)}{\alpha}=f(x).$$

次に T が線形であることを示しておこう．$x, y\in {}^*\mathscr{N}$ とすると，$\alpha\in {}^*D$ を $\alpha x, \alpha y\approx 0$ となるようにとることができる．よって

$$\begin{aligned} T(x+y)&=\frac{1}{\alpha}(f(\alpha x+\alpha y)) \\ &=\frac{1}{\alpha}f(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}f(\alpha y) \\ &=Tx+Ty. \end{aligned}$$

また $\lambda\in {}^*D$ についても，$\alpha x, \alpha\lambda\approx 0$ となるようにとることができるので

$$T(\lambda x)=\frac{1}{\alpha}f(\alpha\lambda x)=\frac{\lambda}{\alpha}f(\alpha x)=\lambda Tx.$$

一意性の証明のために，$x\in I_{\mathscr{N}}$ について $f(x)=T_1x=T_2x$ とし，T_1 および T_2 は ${}^*\mathscr{N}$ の線形写像とする．$x\in {}^*\mathscr{N}$ を任意にとると

$$\begin{aligned} T_1x&=\nu\|x\|T_1\left(\frac{x}{\nu\|x\|}\right) \\ &=\nu\|x\|T_2\left(\frac{x}{\nu\|x\|}\right)=T_2x. \end{aligned}$$

$\|T\|$ が有限であることを示すのであるが，そうでないと仮定すると，移行原理によって，$x\in {}^*\mathscr{N}$ が存在して $\|x\|=1, \|Tx\|\geq\|T\|-1$，すなわち $\|Tx\|$ は無限大でなくてはならない．これより $x/\|Tx\|\approx 0$ であり

$$Tx=\|Tx\|f\left(\frac{x}{\|Tx\|}\right)$$

すなわち

$$\|Tx\|=\|Tx\|\cdot\left\|f\left(\frac{x}{\|Tx\|}\right)\right\|.$$

これより $\|f(x/\|Tx\|)\|=1\notin I_{\mathscr{N}}$ となり矛盾である．□

定理 4.2 f_1, f_2 を局所線形写像とし，T_1, T_2 をそれぞれその拡張となる線形写像とする．このとき $f_1\sim f_2$ となるための必要十分な条件は，$x\in {}^*\mathscr{N}, \|x\|=1$ ならば $T_1x\approx T_2x$ となることである．

証明 すべての $x\in {}^*\mathscr{N}$ について $\|x\|=1$ ならば $T_1x\approx T_2x$ と仮定する．$u\in I_{\mathscr{N}}$ ならば

$$\frac{f_1(u)-f_2(u)}{\|u\|}=\frac{T_1(u)-T_2(u)}{\|u\|}$$
$$=T_1\left(\frac{u}{\|u\|}\right)-T_2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\approx 0$$

となり，$f_1 \sim f_2$ を得る．

逆に $f_1 \sim f_2$ を仮定する．$\|x\|=1$ として，$\alpha\approx 0, \alpha>0$ となるようにとると

$$T_1x-T_2x=\frac{1}{\alpha}(T_1(\alpha x)-T_2(\alpha x))$$
$$=\frac{f_1(\alpha x)-f_2(\alpha x)}{\|\alpha x\|}\approx 0. \quad \square$$

定義　局所線形写像 f について，$\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への有界線形作用素 T が存在してすべての $x\in I_{\mathscr{N}}$ について $Tx=f(x)$ となるとき，f は**微分** (differential) とよばれる．

定理 4.3　f_1, f_2 を微分とするとき，$f_1\sim f_2$ ならば $f_1=f_2$ である．

証明　仮定よりすべての $x\approx 0$ について $f_1x=T_1x, f_2x=T_2x$ となる標準的(すなわち standard な) 線形作用素 T_1, T_2 が存在する．定理 4.2 より $\|u\|=1$ ならば $T_1u\approx T_2u$ である．そこで $\|u\|=1$ となる標準的元，すなわち $u\in\mathscr{N}$ をとると，$T_1u=T_2u$ となり，したがって，すべての $x\in\mathscr{N}, x\neq 0$ について

$$T_1x=\|x\|\cdot T_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$
$$=\|x\|\cdot T_2\left(\frac{x}{\|x\|}\right)=T_2x$$

となる．これより $T_1=T_2$ であり，したがって $f_1=f_2$ となる．$\square$

定義　f を $\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への任意の函数とし，$x_0\in\mathscr{N}$ とする．このとき $\Delta_{x_0}f$ を $I_{\mathscr{N}}$ 上の函数として

$$\Delta_{x_0}f=f(x_0+u)-f(x_0)$$

によって定義する．

これよりただちに

系 4.4　f が x_0 で連続ということと $\Delta_{x_0}f$ が局所写像であることは同値である．

定義　f を $\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への函数とし，$x_0\in\mathscr{N}$ とする．f が点 x_0 で**微分可能** (differentiable at x_0) とは $\Delta_{x_0}f$ が一つの微分と同値なことをいう．

このとき定理 4.3 によれば，$\Delta_{x_0}f$ は唯一つの微分と同値であるから，これを

$d_{x_0}f$ または単に df と記する．そうすると

$$\Delta_{x_0}f = d_{x_0}f + \alpha(u)\cdot\|u\|$$

となる．ここに $u \approx 0$ ならば $\alpha(u) \approx 0$，すなわち α は局所写像である．

ここで，いくらかの古典的で特別な場合にふれておく．最初のものは $\mathscr{N} = R^n$, $n > 0$ で $\mathscr{M} = R$ の場合で，このときは $\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への函数は単に n 変数の実数値函数である．$\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への線形作用素は

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n$$

の形の函数であって，f が点 $a = \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ で微分可能というのは

$$f(a_1 + h_1, \cdots, a_n + h_n) - f(a_1, \cdots, a_n) = r_1h_1 + \cdots + r_nh_n + \|h\|\cdot\alpha(h)$$

となることで，ここに $h = \langle h_1, \cdots, h_n\rangle$ について $h \approx 0$ ならば $\alpha(h) \approx 0$ となることである．このとき $r_1, \cdots, r_n$ はそれぞれ f の $x_1, \cdots, x_n$ に関する点 a での**偏微分係数** (partial differential) である．読者はこのことを確かめてほしい．

$\mathscr{N} = R^n$，$\mathscr{M} = R^m$，$n, m > 0$ の場合は，$\mathscr{N}$ から $\mathscr{M}$ への函数で点 $\alpha \in \mathscr{N}$ で微分可能な f については，その微分は f の点 a における線形作用素に応ずるヤコビ† 行列とよばれる (n, m) 型の行列が対応している．読者諸氏はこのことも示して見られるとよいと思う．

---

†[訳注] C. Jacobi (1804-1851) 強烈な個性の持主で N. Abel のよき理解者であったという．微分法の Jacobi 行列とか，Hamilton-Jacobi の方程式等は有名である．微分方程式や楕円函数の理論には深い着想がある．

5 ヒルベルト空間

1. ユニタリー空間

この章では，超準解析の方法を用いて，ヒルベルト空間におけるいくらかの重要な定理を導いてみる．その一つは(不変部分空間に関するベルンシュタイン・ロビンソンの定理)であって，その最初の証明は超準解析の方法によるものであった．この問題は永い間未解決の問題として残っていたものである．

我々は Halmos [4] 等を参考にすることにして，有限次の線形代数の結果は自由に用いることにする．しかし，無限次元の理論についての知識は仮定していない．

C を複素数体として，その元 z の共役複素数を通常通り $\bar{z}$ と記す．

定義 H を C 上の線形空間とするとき，H が**ユニタリー空間**(unitary space)とは，$H\times H$ から C への函数である**内積**(inner product) (a, b) が定義され，次の条件が満足されることをいう：

(1) $(a, a)\geq 0$ (したがって $(a, a)\in R$) であり，$(a, a)=0$ が成立するのは $a=0$ のときに限る

(2) $(a, b)=\overline{(b, a)}$

(3) $(a+b, c)=(a, c)+(b, c)$

(4) $\lambda \in C$ について $(\lambda a, b)=\lambda(a, b)$.

性質(2), (3)および(4)よりただちに

(5) $(a, b+c)=(a, b)+(a, c)$

(6) $(a, \lambda b)=\bar{\lambda}(a, b)$.

$x \in H$ に対して $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$ と記すと，容易にわかるように(たとえば Halmos [5]), $\|\cdots\|$ はノルムの条件を満足する. (したがってユニタリー空間は線形ノルム空間である) またシュヴァルツ† の不等式

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

が成立する.

シュヴァルツの不等式を用いると，内積が $H \times H$ から C の中への連続函数となることがわかる．それは

$$\begin{aligned}\|(x, y)-(u, v)\| &= \|(x, y)-(x, u)+(x, v)-(u, v)\| \\ &\leq \|(x, y-v)\|+\|(x-u, v)\| \\ &\leq \|x\| \cdot \|y-v\|+\|x-u\| \cdot \|v\|\end{aligned}$$

となるからである.

a, b をユニタリー空間の元とする．$(a, b)=0$ であるとき a, b は**直交する** (a is perpendicular to b) といって $a \perp b$ と記する.

$\{e_n | n \in N^+\}$ なる列は, 次の条件が満足されるとき, **正規直交** (orthonormal) であるという.

(a) $\|e_n\|=1$

(b) $n \neq m$ ならば $e_n \perp e_m$

この条件は次のように一つの条件としても表現できる．すなわち

$$(e_n, e_m)=\delta^n_m$$

ここに δ^n_m (クロネッカー†† のデルタ) は $n \neq m$ のとき 0, $n=m$ のとき 1 であ

†[訳注] H. Schwarz (1843-1921) 函数論における鏡像原理とか円と多角形の間の等角写像に関する Schwarz-Christoffel の変換など，その他微分の順序の交換可能性や表面積の定義に関する例などよく知られている.

††[訳注] L. Kronecker (1823-1891) 有理数上のアーベル拡大は円分体であることを示した．虚 2 次体上のアーベル体は虚数乗法によって得られるだろうというのがいわゆる Kronecker の青春の夢である. Riemann の ζ 函数の極限公式を証明した. 無限に対する態度では終生 Cantor と相容れなかったという.

る．

正規直交列は明らかに線形独立である．それは

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$$

とすると，$1 \leq j < n$ に対して

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, e_j) = (0, e_j) = 0$$

となるからである．

ユニタリー空間の線形作用素 T について，その空間のすべての x, y に対して

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

が成立するとき，**エルミート**[†]**的**（Hermitian）または**自己共役**（self-adjoint）とよばれる．特に T がエルミート的であれば

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$$

であるから，すべての x に対して (Tx, x) は実数となる．

T_1, T_2 を一つの空間のエルミート作用素とするとき，すべての x について

$$(T_1 x, x) \leq (T_2 x, x)$$

が成立するとき，$T_1 \leq T_2$ と記する．

ユニタリー空間の最初の例は n 次元複素線形空間 C^n である．これは複素数の n 重対で算法は成分各の和と積によるものである．その内積については，$a = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle$, $b = \langle \beta_1, \cdots, \beta_n \rangle$ として

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i$$

とする．容易に確かめられるように性質(1)から(4)が成立する．このようにして内積の入った空間 C^n はユニタリー空間であるから，シュヴァルツの不等式により

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を満足する．

---

†[訳注]　C.　Hermite（1822-1901）　与えられた有理整数を判別式にもつ有限次代数体は高々有限という Hermite-Minkowski の定理などまた，微分方程式や対称核を有する線形変換の理論に独自の観点を導入した．$(-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ による直交函数系や $e = 2.71828\cdots$ の超越性証明も彼による．

次の例は(この章ではこの空間が大切なのであるが) l^2 とよばれる空間である．これは C^n の無限次元への自然な延長である．l^2 の元は

$$a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

の形の無限列で

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$$

を満足するものの全体である．

$a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$, $b=(\beta_1, \beta_2, \cdots)$ を l^2 の点で，$\lambda\in C$ とするとき

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots)$$
$$\lambda a=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots)$$

と定めれば，$a+b\in l^2$ であることは C^n の三角不等式(またはミンコウスキーの不等式ともよばれている)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i+\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

から容易に得られる．

内積に関しても

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i$$

としたいわけであるが，これでよいことは，シュヴァルツの不等式を C^n の二点 $\langle|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|\rangle$, $\langle|\beta_1|, \cdots, |\beta_n|\rangle$ について用いると，

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i\beta_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

となるので，極限移行によって，級数 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i$ が絶対収束することがわかる．この定義によって l^2 はユニタリー空間となることがわかる．

l^2 の点で $b_k=\{\delta_n^k|n\in N^+\}$ となるものを考える．すなわち k 番目のところだけ 1 で他は 0 となる列

$$b_k=(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$$

の列 $\{b_k|k\in N^+\}$ を考える．明らかに，この列 $\{b_k\}$ は正規直交列であり，したがって一次独立である．

$a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)\in l^2$ として，$n\to\infty$ とすると

$$\left\|a-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\right\|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}|\alpha_i|^2=\|a\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\to 0$$

となる．これは

$$a=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i$$

ということで，$\{b_k\}$ は l^2 の**正規直交基底**（orthonormal basis）ということである．$\{b_k\}$ は一次独立であったから l^2 は無限次元である．

定義　ユニタリー空間は，無限次元でコーシーの意味で完備なとき，ヒルベルト空間とよばれる．

定理 1.1　l^2 はヒルベルト空間である．

証明　完備性を示しておけば十分である．そこで $\{a_n | n\in N^+\}$ を l^2 の中のコーシー列とする．

$$a_n=(\alpha_o^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \cdots)$$

とおいて，ε を任意の正数とすると，$n_0\in N^+$ が存在して

$$p, q\geq n_0 \text{ ならば } \|a_p-a_q\|<\varepsilon.$$

すなわち，$p, q\geq n_0$ に対しては

$$A_{p,q}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(p)}-\alpha_i^{(q)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

したがって $n_0\leq p, q$，$m<K$ については

$$|\alpha_m^{(p)}-\alpha_m^{(q)}|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(p)}-\alpha_i^{(q)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq A_{p,q}<\varepsilon$$

となる．すなわち，各 m について $\{\alpha_m^{(n)} | n\in N^+\}$ は一つのコーシー列となり，したがって一つの数に収束する．そこで $n\to\infty$ のとき $\alpha_m^{(n)}\to\alpha_m$ とする．そして $K\in N^+, p\geq n_0$ の下で $q\to\infty$ とすれば

$$\left(\sum_{m=1}^{K}|\alpha_m^{(p)}-\alpha_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\varepsilon$$

となり，再び $K\to\infty$ とすると

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_m^{(p)}-\alpha_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\varepsilon$$

である．この級数の収束性より $p=n_0+1$ とおくと

$$b=(\alpha_1^{(p)}-\alpha_1, \alpha_2^{(p)}-\alpha_2, \cdots)\in l^2.$$

したがって

$$a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)=(\alpha_1^{(p)}, \alpha_2^{(p)}, \cdots)-b\in l^2$$

を得る．上の不等式は

$$p\geq n_0 \quad \text{ならば} \quad \|a_p-a\|\leq\varepsilon$$

を意味しており，$a_p \to a$ を得る．これは l^2 が完備であることを意味している．
□

l^2 には $\{b_k\}$ という正規直交基底が存在することは，すでに示したところである．この章では今後 $\{e_k\}$ を任意に固定された l^2 の正規直交基底とする．これから証明することは，内積が $\{b_k\}$ についてと $\{e_k\}$ について全く同じ方法で計算できるということである．すなわち，

定理 1.2 $a=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$, $b=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i e_i$ とするとき，

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\bar{\beta}_i.$$

証明 この節の最初で述べた性質(2), (6)と $\{e_k\}$ が正規直交基底であることを用いると

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i e_i, \beta_j e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_j(e_i, e_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i.$$

求める結果は内積の連続性を用いて得られる．□

系 1.3 $a=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ ならば $\|a\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$

定義 ヒルベルト空間の中に可算で稠密な集合が存在するとき，**可分** (separable) であるという．

定理 1.4 l^2 は可分である．

証明 集合 A を e_i の有限個の線形結合で，その係数の実部，虚部が共に有理数となるものの全体とする．明らかに A は可算集合である．したがって証明すべきことは，これが l^2 の中で稠密なことである．そこで

$$b=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i \in l^2$$

で $\varepsilon>0$ とする．そして $a\in A$ が存在して $\|b-a\|<\varepsilon$ を証明する．

最初に n をとって

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\frac{2}{3}\varepsilon^2$$

とし，次に各 $i=1, 2, \cdots, n$ について実部，虚部が共に有理数となる γ_i を $|\alpha_i-\gamma_i|<\dfrac{\varepsilon}{2^i}$ となるように選ぶ．そして

$$a=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i e_i$$

とおくと

$$\|b-a\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\gamma_i|^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\varepsilon^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4^i}+\frac{2}{3}\right)$$

$$<\varepsilon^2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\varepsilon^2$$

となり所要の結果を得る. □

さて, 有名なリース†•フィッシャー††の定理の意味するところは, 任意の可分なヒルベルト空間は(内積を保つ同型写像で)同型となることである. したがって l^2 で成立する性質はすべての可分なヒルベルト空間で成立する. だからリース•フィッシャーの定理を具体的な形で用いているわけではないのであるが, 色々の主張は l^2 に限られているものとする.

応用上は $C\subseteq S$, $l^2\subseteq S$ と考えるのがよいのであろう. もちろん l^2 は点列から成っているので真の意味の元から成っているわけではないが, 通常, S を十分大きくとって, l^2から S の中への埋込みが存在することを仮定し, S に埋込まれたものを l^2 と考えてよいわけである.

正規直交基底 $\{e_n\}$ は N^+ から l^2 の中への函数と考えられるから, e は $^*N^+$ から $^*l^2$ の中への函数でもあるわけで, 移行原理によって, $n, m\in {}^*N^+$ について

$$(e_n, e_m)=\delta_m^n=\begin{cases}1 & n=m,\\ 0 & n\neq m.\end{cases}$$

また, 移行原理より, すべての $a\in {}^*l^2$ に対して, 内点列 $\{\alpha_n|n\in {}^*N^+\}$ が存在して

$$a=\sum_{n\in {}^*N^+}\alpha_n e_n \qquad (1)$$

と表現できる. この等式の意味は, すべての $\varepsilon\in {}^*R^+$ について, $n_0\in {}^*N^+$ が存在して, すべての $n\geq n_0$, $n\in {}^*N^+$ について

†[訳注] F. Riesz (1880-1956) 順序線形空間, 対称作用素のスペクトル分解, エルゴール理論等に優れた結果がある.

††[訳注] R. Fisher (1890-1962) Fisher の情報量等, 現代統計学の多くの基礎概念を導入した.

$$\left\| a - \sum_{k \leq n} \alpha_n e_n \right\| < \varepsilon$$

が成立するという意味である．性質(1)を満足する a については

$$\|a\|^2 = \sum_{n \in {}^*N^+} |\alpha_i|^2 \tag{2}$$

でもある．この意味も，$\|a\|$ は超実数であって，すべての $\varepsilon \in {}^*R^+$ について，$n_0 \in {}^*N^+$ が存在して，すべての $n \in {}^*N^+$，$n \geq n_0$ について

$$\|a\| - \varepsilon < \left(\sum_{k \leq n} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|a\|$$

ということである．

定理4-1.3によって次の性質を得る．

定理 1.5　$a \in {}^*l^2$ が性質(2)を満足すると仮定すると，a が有限であるための必要十分条件は $\sum_{n \in {}^*N^+} |\alpha_i|^2$ が有限となることである．

よりきめ細かい性質として，

定理 1.6　$a \in {}^*l^2$ が性質(2)を満足し有限とする．a が近準点であるための必要十分条件は，すべての無限の k について

$$\sum_{\substack{n \in {}^*N^+ \\ n > k}} |\alpha_n|^2 \approx 0$$

となることである．

証明　まず $a \in l^2$ とすると，$a = \sum_{n \in N^+} \alpha_n e_n$ である．そこで $r_k = \sum_{n \in {}^*N^+} |\alpha_n|^2$ とすると，$k \to \infty$ のとき $r_k \to 0$ である．定理2-5.1によって k が無限大ならば $r_k \approx 0$ である．移行原理によると，k が無限大なら

$$r_k = \sum_{\substack{n \in {}^*N^+ \\ n > k}} |\alpha_n|^2$$

であるから，$a \in l^2$ ならば所要の結果を得る．

次に $a \in {}^*l^2$ が近準点として $a \approx b \in l^2$ とする．

$$b = \sum_{n \in {}^*N^+} \beta_n e_n$$

とすると，

$$\|a - b\|^2 = \sum_{n \in {}^*N^+} |\alpha_n - \beta_n|^2 \approx 0$$

である．また $b \in l^2$ であったから，$k \in {}^*N - N$ については

$$\sum_{\substack{n \in {}^*N^+ \\ n > k}} |\beta_n|^2 \approx 0$$

でもある．そこで l^2 の三角不等式(ミンコウスキーの不等式)と移行原理を用いると，

$$\left(\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n-\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

であるから，$k\in{}^*N-N$ ならば

$$\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n|^2\approx 0$$

を得る．

逆方向の証明：$\sum_{n\in{}^*N^+}|\alpha_n|^2$ が有限とし，すべての $k\in{}^*N-N$ について

$$\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n|^2\approx 0$$

と仮定する．このときは，$n\in{}^*N^+$ ならば α_n は有限となっている．そこで $n\in N^+$ について $\beta_n={}^\circ(\alpha_n)$ として $b=\sum_{n\in N^+}\beta_n e_n$ とおく．証明すべきことは，$b\in l^2$ であり $a\approx b$ となることである．

すべての $n\in N^+$ について $\beta_n\approx\alpha_n$ であるから，すべての $k\in N^+$ について

$$\sum_{n=1}^{k}|\beta_n|^2-\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n|^2\approx 0$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{k}|\beta_n|^2\leq\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n|^2+1$$

である．また

$$\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n|^2\leq\sum_{n\in{}^*N}|\alpha_n|^2=\|a\|^2$$

に注意すると

$$\sum_{n=1}^{k}|\beta_n|^2\leq\|a\|^2+1.$$

そこで $\|a\|$ が有限であることと，上界が k に無関係であることより

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2<\infty$$

となり，$b\in l^2$ を得る．

次に，任意の $k\in{}^*N^+$ について

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2&=\sum_{n\in{}^*N^+}|\alpha_n-\beta_n|^2\\&=\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n-\beta_n|^2+\sum_{\substack{n\in{}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n-\beta_n|^2\end{aligned}$$

が成立する．また，すべての有限の k については

$$\sum_{n=1}^{k}|\alpha_n-\beta_n|^2\approx 0$$

であるから，無限延長定理によって，この式が成立する無限大の k が存在する．そこで，再びミンコウスキーの定理をこの k について用いると，

$$\left(\sum_{\substack{n\in {}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n-\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{\substack{n\in {}^*N^+\\ n>k}}|\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{\substack{n\in {}^*N^+\\ n>k}}|\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\approx 0$$

である．ここで仮定と証明の前半の部分が用いられたわけである．これより $\|a-b\|\approx 0$ となり所要の結果を得る．□

P を $N^+\times l^2$ から l^2 への次のような函数とする．すなわち

$$a=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\in l^2 \tag{3}$$

に対して

$$P(n, a)=P_n(a)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

とする．明らかに，すべての $n\in N^+$ に対して P_n は l^2 から l^2 への線形写像である．

定理 1.7　P_n は有界線形作用素で $\|P_n\|=1$ である．

証明　P_n の線形性は明らかである．a が性質(3)を満足するものとすると

$$\|P_n(a)\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2=\|a\|^2$$

であるから，$\|P_n\|\leq 1$ であり $\|P(e_1)\|=\|e_1\|$ であるから $\|P_n\|=1$ となる．□

写像 ${}^*P$，例によって P と記するが，は ${}^*N^+\times{}^*l^2$ の元を ${}^*l^2$ に写す．したがって移行原理より

$$n\in {}^*N^+ \text{ ならば } \|P_n\|=1$$

であり，もし

$$a=\sum_{t\in {}^*N^+}\alpha_i e_i\in l^2$$

ならば，すべての $\nu\in {}^*N^+$ について

$$P_\nu(a)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i e_i$$

が成立する．

通常のように，I で l^2 の，したがって ${}^*l^2$ の恒等変換を記すと，(移行原理によって) すべての $a\in{}^*l^2$ について $Ia=a$ である．重要な近似として次の性質がある．

定理 1.8　$\nu \in {}^*N - N$ であり $a \in {}^*l^2$ が近準点ならば $(I-P_\nu)a \approx 0$，すなわち $P_\nu a \approx a$ である．

証明　$a = \sum_{i \in {}^*N^+} \alpha_i e_i$ を ${}^*l^2$ の近準点とする．このとき

$$\|(I-P_\nu)a\| = \|\sum_{\substack{i \in {}^*N^+ \\ i > \nu}} \alpha_i e_i\| = \sum_{\substack{i \in {}^*N^+ \\ i > \nu}} |\alpha_i|^2$$

が成立する．しかし a は近準点であるから，定理 1.6 によってそれは無限小である．□

定理 1.9　T がコンパクトな l^2 上の線形作用素で k が無限大ならば

$$\|T - P_k T\| \approx 0$$

である．

証明　$\|a\|=1$, $a \in {}^*l^2$ とする．定理 4-2.1 によって Ta は近準点である．したがって，定理 1.8 によって

$$\|(T-P_\nu T)a\| = \|(I-P_\nu)Ta\| \approx 0 \quad □$$

各 $n \in N^+$ に対して H_n で $\{e_1, \cdots, e_n\}$ で張られる l^2 の部分空間とする．このようにすると P_n は l^2 を n 次元の線形空間 H_n（これは明らかに C_n と同型である）に写す．

この H は，すべての $n \in N^+$ に対して $H(n) = H_n$ となるような，N から $\mathscr{P}(l^2)$ への函数と考えることができる．したがって ${}^*H$（これも H と記す）は ${}^*N$ を ${}^*\mathscr{P}(l^2)$ の中に写す．$\nu \in {}^*N$ についても H_ν は ${}^*l^2$ の $\{e_1, e_2, \cdots, e_\nu\}$ で張られる部分空間である．

この節を終るに当って，コンパクト作用素に関する古典定理の超準解析による証明を与えておこう．

定義　l^2 の線形作用素 T が**有限階数**（finite rank）とは，有限次元の部分空間 $H \subseteq l^2$ が存在して，すべての $x \in l^2$ に対して $Tx \in H$ となることをいう．

定理 1.10　T を l^2 のコンパクト作用素とする．ε を任意の正実数に対して有限階数の線形作用素 T' が存在して $\|T-T'\| < \varepsilon$ となる．

証明　定理 1.9 によると，すべての $k \in {}^*N - N$ について $\|T - P_k T\| < \varepsilon$ である．そこで内集合

$$A = \{k \in {}^*N \mid \|T - P_k T\| < \varepsilon\}$$

はすべての無限整数を含むから，少なくとも一つの有限の整数を含む．そこで，その一つを $k \in N^+$ とすると，$T' = P_k T$ は l^2 を H_k に写すのであるから有限階数である．□

2. 直交射影

この節では，H は任意のヒルベルト空間とする（特に H の可分性は仮定しない）．H の閉部分空間への直交射影子の古典的な理論を，都合よいときには，超準解析の方法を用いて，展開してみよう．特に $H \subseteq S$ と仮定しておくことにする．

次の式を考える．

$$\|u \pm v\|^2 = (u \pm v, u \pm v) = \|u\|^2 + (u, v) + (v, u) + \|v\|^2$$

であるから，±に応ずる式を加えて

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

（平行四辺形等式）を得る．

特別の場合として，$u \perp v$ となるときは，$(u, v) = (v, u) = 0$ であるから

$$u \perp v \text{ ならば } \|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

の式と数学的帰納法を用いると次の性質を得る．

ピタゴラス†の定理：$u_1, \cdots, u_n \in H$ とし，$i, j = 1, \cdots n$，そして $i \neq j$ ならば $u_i \perp u_j$ とすれば，

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$$

である．

$t_1, \cdots, t_k \in H$ とするとき，

$$\mathrm{span}(t_1, \cdots, t_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t_i \,\middle|\, \alpha_i \in C \right\}$$

と記する．明らかに，$\mathrm{span}(t_1, \cdots, t_n)$ は H の線形部分空間であり，もし $\{t_1, \cdots, t_k\}$ が線形独立ならば，それは k 次元である．

定理 2.1 もし $\{t_1, \cdots, t_k\}$ が H の中の正規直交系であれば，$\mathrm{span}(t_1, \cdots, t_k)$ は H の閉部分空間である．

証明 $E = \mathrm{span}(t_1, \cdots, t_k)$, $x \in {}^*E$, $x \approx y \in H$ とする．証明すべきことは，$y \in E$ である．

移行原理より

$$x = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_k t_k, \qquad \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in {}^*C.$$

---

†［訳注］ Pythagoras (572?-492? B.C.) イオニアの人で“万物は数なり”との言を残した．比例論，三大問題（角の 3 等分，立方体の倍積，円の正方化），完全数なども興味の対象であったという．

ピタゴラスの定理によって

$$\|x\|^2=|\alpha_1|^2+\cdots+|\alpha_k|^2$$

となる．$\|x\|\approx\|y\|$（定理 4-1.2 による）であり，y は標準的であるから，$\|x\|$ は有限であり，$|\alpha_i|\leq\|x\|$ によって α_i は有限，したがって近準点である．そこで $\beta_i={}^\circ(\alpha_i)$ とすると

$$y=\beta_1 t_1+\cdots+\beta_k t_k\in E$$

となる．□

ここで，ほとんど明らかな閉包に関する定理（それは任意の線形ノルム空間でも成立する）について注意しておく．

定理 2.2（1）$\{E_n|n\in N^+\}$ を H の線形部分空間の例で，すべての n について $E_n\subseteq E_{n+1}$ とする．このとき $G=\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$ はやはり H の線形部分空間である．

（2）E が H の線形部分空間とすれば，$\overline{E}$ も線形部分空間である．

証明（1）$x,y\in G,\lambda\in C$ とすると，$x,y\in E_n$ となる n が存在する．よって $x+y$，$\lambda x\in E_n\subseteq G$ である．

（2）$x,y\in\overline{E},\lambda\in C$ とすると，点列 $\{x_n|n=1,2,\cdots\}$ および $\{y_n|n=1,2,\cdots\}$ が存在して $x_n,y_n\in E$ であり $x_n\to x,y_n\to y$ である．したがって，すべての n について $x_n+y_n,\lambda x_n\in E$ となる．これは $x+y,\lambda x\in E$ を意味している．□

下に記すいくらかの補題においては，E は H の閉部分空間とする．定理 3-5.18 によって E は H の完備部分空間になっていることに注意しておこう．

補題 1. 各 $x\in H$ に対して，一意的な点 $y\in E$ があって，すべての $z\in E$ に対して

$$\|x-y\|\leq\|x-z\|$$

が成立する．

証明 $x\in E$ のときは $y=x$ とすると，一意性も含めて求められた性質が成立する．そこで $x\notin E$ と仮定する．

$\alpha=\inf_{x\in E}\|x-t\|$ とすると，すべての $\varepsilon>0$ に対して，$z\in E$ が存在して

$$\alpha\leq\|x-z\|\leq x+\varepsilon$$

が成立する．移行原理によって $\varepsilon\approx 0$ とすると，$z\in{}^*E$ が存在して $\|x-z\|\approx\alpha$ となる．この z が近準点であることを示す．

今 z が近準点でなければ，E が完備であるから，定理 3-5.20 によって，正の実数 r が存在して，すべての $u\in E$ に対して $\|u-z\|\geq r$ となる．α の定義によ

って，$u\in E$ を条件

$$\|x-u\|<\left(\alpha^2+\frac{r^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

となるようにとることができる．これより $\|u-z\|<r$ を導くことによって矛盾が生ずることを示す．

平行四辺形等式によって

$$\|(x-u)+(x-z)\|^2+\|u-z\|^2=2(\|x-u\|^2+\|x-z\|^2).$$

さて $\frac{1}{2}(u+z)\in {}^*E$ であるから

$$\|(x-u)+(x-z)\|=2\left\|x-\frac{1}{2}(u+z)\right\|\leq 2\alpha$$

である．したがって，ある $\delta\approx 0$ について

$$\begin{aligned}\|u-z\|^2&=2\|x-u\|^2+2\|x-z\|^2-4\left\|x-\frac{1}{2}(u+z)\right\|^2\\&<2\left(\alpha^2+\frac{r^2}{4}\right)+2\alpha^2+\delta-4\alpha^2=\frac{r^2}{2}+\delta<r^2\end{aligned}$$

となり矛盾であり，z は近準点である．

さて $z\approx y\in E$ とすると，E は閉集合であるから $y\in E$ である．したがって $\|x-y\|=\alpha$ となり，すべての $z\in E$ について $\|x-y\|\leq\|x-z\|$ が成立する．

一意性については，$\|x-y'\|=\|x-y\|$, $y'\in E$ とすると，平行四辺形等式によって

$$\begin{aligned}\|y-y'\|^2&=2\|x-y\|^2+2\|x-y'\|^2-4\left\|x-\frac{1}{2}(y+y')\right\|^2\\&\leq 4\alpha^2-4\alpha^2=0\end{aligned}$$

となり，$y=y'$ を得る．□

定義　補題1で一意的に定まる y を $P_E x$ と記する．また

$$E^\perp=\{x\in H\mid \text{すべての } u\in E \text{ について } x\perp u\}$$

と記し，$E^\perp$ を E の**直交補空間** (orthogonal complement) とよぶ．

補題 2.　$E^\perp$ は H の線形閉部分空間である．

証明　$x, y\in E^\perp, \lambda\in C$ とし，u を E の任意の元とする．このときは

$$(x+y, u)=(x, u)+(y, u)=0,$$
$$(\lambda x, u)=\lambda(x, u)=0$$

となるから，$x+y, \lambda x\in E^\perp$ である．よって $E^\perp$ は線形部分空間である．

$E^{\perp}$ が閉空間であることを示すために，$x \in {}^*(E^{\perp}), x \approx y \in H$ とすると，すべての $u \in E$ に対して

$$(y, u) \approx (x, u) = 0$$

であるから，$(y, u) = 0$ となる．これは $y \in E^{\perp}$ を意味している．□

補題 3. すべての $x \notin E$ に対して $(x - P_E x) \in E^{\perp}$ である．

証明 $z \in E, z \neq 0, y = P_E x$ そして $\lambda \in R, \lambda \neq 0$ とする．上と同様に $\alpha = \|x - y\| > 0$ である．また $\mathscr{R}, \mathscr{I}$ でそれぞれ実部，虚部を表わすものとする．

$$\begin{aligned}\alpha^2 &< \|x - (y + \lambda z)\|^2 \\ &= ((x - y) - \lambda z, (x - y) - \lambda z) \\ &= \|x - y\|^2 + \lambda^2 \|z\|^2 - (x - y, \lambda z) - (\lambda z, x - y) \\ &= \alpha^2 + \lambda^2 \|z\|^2 - 2\lambda \mathscr{R}(x - y, z)\end{aligned}$$

これより $A^2\lambda^2 - 2B\lambda > 0$，ここに $A = \|z\| \neq 0$ であり $B = \mathscr{R}(x - y, z)$ である．しかし $\lambda = B/A^2$ において

$$A^2\lambda^2 - 2B\lambda = \left(A\lambda - \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2} = -\frac{B^2}{A^2}$$

であるから，$B = 0$ でなければ $-B^2/A^2 < 0$ となる．これより $z \in E, z \neq 0$ ならば $\mathscr{R}(x - y, z) = 0$ となる，同様にして

$$\mathscr{I}(x - y, z) = \mathscr{R}((-1)(x - y, z)) = \mathscr{R}(x - y, iz) = 0$$

であるから $(x - y, z) = 0$ である．よって $x - y \in E^{\perp}$ となる．□

補題 4. $y = P_E x$ の必要十分条件は $y \in E$ かつ $x - y \in E^{\perp}$ である．

証明 補題 3 によって一方向は証明されている．他の方向については，$y \in E$, $x - y \in E^{\perp}$ とする．ピタゴラスの定理より，すべての $z \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2\end{aligned}$$

これより，$y = P_E x$ である．□

特にこの補題によって

$$x \in E^{\perp} \text{ ならば } P_E x = 0.$$

補題 5. P_E は有界作用素であり，$E = \{0\}$ でなければ，$\|P_E\| = 1$ である．

証明 $y = P_E x, y' = P_E x'$ とする．補題 4 によって $y, y' \in E, x - y, x' - y' \in E^{\perp}$ であり，E も $E^{\perp}$ も線形空間であるから，すべての $\lambda \in C$ について

$$y + y' \in E \qquad (x + x') - (y + y') \in E^{\perp}$$

$$\lambda y \in E \qquad \lambda(x-y) \in E^{\perp}$$

補題4によって

$$P_E(x+x')=y+y'=P_Ex+P_Ex'$$

$$P_E(\lambda x)=\lambda y=\lambda P_Ex$$

となる．ピタゴラスの定理により

$$\|x\|^2=\|P_Ex\|^2+\|x-P_Ex\|^2$$

であるから $\|P_Ex\| \leq \|x\|$ となる．これより P_E は有界で $\|P_E\|=1$ となる．

終りに，もし $E \neq \{0\}$ ならば，$u \in E$ で $\|u\|=1$（例えば $x \in E, x \neq 0$ に対して $u=x/\|x\|$）となるものがあるから，これに対しては $P_Eu=u$ であり，したがって $\|P_Eu\|=\|u\|$ であるから $\|P_E\|=1$ となる．□

定義 A, B を H の線形部分空間とする．すべての $u \in A, v \in B$ について，$u \perp v$ となるとき，$A \perp B$ と記して，A と B は**直交する空間**(orthogonal spaces)であるという．

補題6. E, F を H の線形閉部分空間とし，$E \perp F$ とする．

$$G=\{x+y \mid x \in E \text{ かつ } y \in F\}$$

とすると G は H の線形閉部分空間であり，G の元は $x \in E, y \in F$ を用いて一意的に $x+y$ の形に表現できる．

証明 仮定により，$E \subseteq F^{\perp}, F \subseteq E^{\perp}$ である．そこで $V=I-(P_E+P_F)$ とおく．すると，$x \in E, y \in F$ のときは $V(x+y)=0$ である．

逆に，もし $Vz=0$ とすると $z=P_Ez+P_Fz$ であり，定義より $z \in G$ である．したがって定理4-1.13により G は H の閉部分空間である．

$z=x+y, x \in E, y \in F$ とする．補題4によって，$x=P_Ez$，同様にして $y=P_Ez$ となる．これより一意性が証明できた．□

定義 補題6の仮定の下で $G=E \oplus F$ と記し，G を E と F の**直和**(direct sum)とよぶ．

関係 $E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3)=(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3$ は明らかであるから（もちろん，$E_1 \perp E_2$, $E_2 \perp E_3$ および $E_1 \perp E_3$ のとき記号は意味を有するのであるが），互いに直交する線形閉部分空間 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ についての記法

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$$

に曖昧さは生じない．さらに $\{E_n \mid n=1, 2, \cdots\}$ が互いに直交する H の線形閉部分空間とするとき，各 n について $G_n=E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ であれば，

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n}^{\dagger}$$

とする．これは定理 2.2 によれば H の線形閉部分空間である．

補題 7. $H = E \oplus E^{\perp}$ である．したがって，すべての $x \in H$ は $x = y + z,\ y \in E,\ z \in E^{\perp}$ に一意的に分解可能である．

証明 分解 $x = P_E x + (x - P_E x)$ と補題 3 により $x \in E \oplus E^{\perp}$ である．一意性は補題 6 による．□

補題 8. $E^{\perp\perp} = E$

証明 $x \in E$ ならば，すべての $y \in E^{\perp}$ について $x \perp y$ である．よって $x \in E^{\perp\perp}$ である．これより $E \subseteq E^{\perp\perp}$．

逆に，$x \in E^{\perp\perp}$ とする．$x = x_1 + y,\ x_1 \in E,\ y \in E^{\perp}$ とする．$x \in E^{\perp\perp}$ であるから $x \perp y$ である．よって

$$0 = (x, y) = (x_1 + y, y) = (x_1, y) + \|y\|^2 = \|y\|^2$$

これより $y = 0$，すなわち $x = x_1 \in E$ である．□

補題 9. $G = E \oplus F$ ならば $P_G = P_E + P_E$ である．

証明 $x \in H$ に対して $u = P_E x,\ v = P_F x$ とおく．証明したいことは $u + v = P_G x$，すなわち補題 4 によって $u + v \in G,\ (u + v) - x \in G^{\perp}$ である．

さて，直和の定義より $u + v \in G$ である．次に t を G の任意の元とし $t = r + s,\ r \in E,\ s \in F$ とする．示すべきことは $(u + v) - x \perp t$ である．しかしこれは，補題 4 と性質 $E \perp F$ を用いると

$$\begin{aligned}(u + v - x, r + s) &= (u + v - x, r) + (u + v - x, s)\\ &= (u - x, r) + (v, r) + (u, s) + (v - x, s)\\ &= 0\end{aligned}$$

となることより得られる．□

系 2.3 $I = P_E + P_{E^{\perp}}$ である．

証明 明らかに $P_H = I$ となる．□

明らかな帰納法によって

系 2.4 $G = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ ならば

$$P_G = P_{E_1} + P_{E_2} + \cdots + P_{E_n}$$

補題 10. $(P_E x, y) = (P_E x, P_E y) = (x, P_E y)$ すなわち P_E はエルミート的で

---

†[訳注] 単に $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ とあるが，その後の記述との関係で閉包をとっておいた．

ある.

証明　$y=P_Ey+u,\ u\in E^\perp$ とする．このとき,

$$(P_Ex,\ y)=(P_Ex,\ P_Ey)+(P_Ex,\ u)$$
$$=(P_Ex,\ P_Ey)$$

これを用いると,

$$(x,\ P_Ey)=(\overline{P_Ey,\ x})=(\overline{P_Ey,\ P_Ex})=(P_Ex,\ P_Ey)\quad \square$$

作用素 P_E はエルミート的であるのみならず，P_E は**巾等** (idempotent) である．すなわち $P_E{}^2=P_E$ (これは $P_Ex\in E$ であるから $P_E(P_Ex)=P_Ex$)．これらによって,

定義　H 上の有界作用素がエルミート的であり巾等のときは，**射影子** (projection) とよばれる.

定理 2.5　P を H の射影子とすると，H の線形閉部分空間 E が存在して $P=P_E$ となる.

証明　E を P の値域とする．もし $x\in E$ とすると，$x=Pu$ となる $u\in H$ が存在する．したがって

$$(I-P)x=Pu-P^2u=0$$

逆に，$(I-P)x=0$ ならば $x=Px\in E$．すなわち定理 4-1.13 により E は H の線形閉部分空間であり，したがって P_E が定義される.

さて $y=Px$ とする．補題 4 によって，すべての $u\in E$ について $x-y\perp u$ を示せばよい．しかし，P がエルミート的で巾等であることより

$$(x-y,\ Pv)=(x,\ Pv)-(Px,\ Pv)=(x,\ P^2v)-(Px,\ Pv)$$
$$=(Px,\ Pv)-(Px,\ Pv)=0$$

となるから $x-y\perp Pv$ である．$\square$

定理 2.6　E, F を H の線形閉部分空間とするとき，次の条件は同値である.

(1)　$E\subseteq F$

(2)　$P_EP_F=P_E$

(3)　すべての $x\in H$ について $\|P_Ex\|\leq\|P_Fx\|$

(4)　$P_E\leq P_F$

証明　(1)⇒(2)：　$x\in H$ に対して $y=P_EP_Fx$ とおく．示すべきことは $y=P_Ex$ である．補題 4 によれば $x-y\in E^\perp$ を示せばよい．しかし補題 3 によると，$P_Fx-y\in E^\perp,\ x-P_Fx\in F^\perp\subseteq E^\perp$ であり，$E^\perp$ が線形空間であるから

$$x-y=(x-P_Fx)+(P_Fx-y)\in E^{\perp}$$

(2)⇒(3)：　$\|P_Ex\|=\|P_EP_Fx\|\leq\|P_E\|\cdot\|P_Fx\|\leq\|P_Fx\|$

(3)⇒(4)：　$(P_Ex, P_Ex)\leq(P_Fx, P_Fx)$ であるから，補題 10 によって

$$(P_Ex, x)\leq(P_Fx, x)$$

となり，定義にしたがって $P_E\leq P_F$ を得る．

(4)⇒(1)：　$x\in E$, すなわち $P_Ex=x$ とする．系2.3によって $I-P_F=P_{F^{\perp}}$ である．したがって補題 10 により

$$\|(I-P_F)x\|^2=((I-P_F)x,(I-P_F)x)=((I-P_F)x, x)$$
$$=(x, x)-(P_Fx, x)=(P_Ex, x)-(P_Fx, x)\leq 0$$

これより $(I-P_F)x=0$, すなわち $P_Fx=x$ となり $x\in F$ を得る． □

補題 11．　$E\subseteq F$ で E, F は H の線形閉部分空間とすると

(1)　$P_EP_F=P_E=P_FP_E$,

(2)　P_F-P_E は射影子である．

証明（1）　定理2.6によって $P_EP_F=P_E$ であり，さらに仮定により $P_Ex\in F$ であるから $P_FP_Ex=P_Ex$ がすべての $x\in H$ について成立する．

（2）　定理2.5を用いると, P_F-P_E がエルミート的で巾等であることを示せばよい．ところで

$$((P_F-P_E)x, y)=(P_Fx, y)-(P_Ex, y)=(x, P_Fy)-(x, P_Ey)$$
$$=(x,(P_F-P_E)y)$$

さらに(1)を用いると,

$$(P_F-P_E)^2=P_F{}^2-P_FP_E-P_EP_F+P_E{}^2$$
$$=P_F-P_E-P_E+P_E=P_F-P_E$$

が成立する． □

補題 12．　$\{G_n|n\in N^+\}$ を H の線形閉部分空間の列で，すべての n について $G_n\subseteq G_{n+1}$ が成立するものとする．

$$G=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n}$$

とすると，すべての $x\in H$ について $P_{G_n}x\to P_Gx$ が成立する．

証明　$x\in H$ とし $y_n=P_{G_n}x$ とおく．定理2.6(3)によって，すべての n について $\|y_n\|\leq\|y_{n+1}\|$ である．また $\|y_n\|\leq\|x\|$ でもあるから

$$\{\|y_n\|^2|n\in N^+\}$$

は単調増加な有界列であり，したがってコーシー列である．$m>n$ に対して，補

題 11(2) によって $P_{G_m}-P_{G_n}$ は射影子であるから，（補題 10 も用いて）

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=((P_{G_m}-P_{G_n})x,(P_{G_m}-P_{G_m})x)\\&=((P_{G_m}-P_{G_n})x,x)\\&=(P_{G_m}x,P_{G_m}x)-(P_{G_n}x,P_{G_n}x)\\&=\|y_m\|^2-\|y_n\|^2\end{aligned}$$

したがって，$\{y_n|n\in N^+\}$ は H の中のコーシー列であり，極限を有する．たとえば $y_n\to y$ とする．

示すべきことは $y=P_Gx$ であるが，このために補題 4 を用いる．$y_n\in G_n\subseteq G$ で G は閉部分空間であるから $y\in G$ である．残っていることは $x-y\in G^\perp$ である．

はじめに，$u\in G_k$ とし $(x-y,u)$ を計算する．$n\geq k$ ならば $x-y_n\in G_n{}^\perp\subseteq G_k{}^\perp$ であるから，$(x-y_n,u)=0$ である．したがって $(x-y,u)=0$ となる．

つぎに，$v\in G$ とすると，列 $\{u_k|k\in N^+\}$ で $u_k\to v$，$u_k\in\bigcup_{n=1}^{k}G_k$ となるものが存在するから $(x-y,u_k)=0$，したがって $(x-y,v)=0$ を得る．これより $x-y\in G^\perp$ が示された．□

補題 13． $\{E_n|n\in N^+\}$ を H の線形閉部分空間の列とし，その直和を $G=E_1\oplus E_2\oplus E_3\oplus\cdots$ とする．このとき，すべての $x\in H$ について

$$P_Gx=\sum_{n=1}^{\infty}P_{E_n}x$$

である．

証明　$G_n=E_1\oplus\cdots\oplus E_n$ とする．系2.4によって，すべての $x\in H$ について，

$$P_{G_n}x=P_{E_1}x+\cdots+P_{E_n}x$$

である．これより補題 12 を用いて所要の結果を得る．□

補題 14． $\{Q_n|n\in N^+\}$ を H の射影子の列で，すべての n について $Q_{n+1}\leq Q_n$ とする．このとき各 $x\in H$ について $\{Q_nx|n\in N^+\}$ は極限を有する．

証明　$Q_n=P_{k_n}$ とすると，定理2.6によって $K_{n+1}\subseteq K_n$ であり，$G_n=K_n{}^\perp$ とおくと，$I-Q_n=P_{G_n}$ となる．さて $G_n\subseteq G_{n+1}$ であるから補題 12 により，すべての $x\in H$ について，$y\in H$ が存在して

$$(I-Q_n)x\to y$$

となる．しかし，これは

$$Q_n x \to x - y$$

を意味している．□

次に，基底の直交化に関する古典的なグラム†・シュミット††の直交化法にふれておこう．$\{t_1, \cdots, t_k\}$ を H の正規直交列とし $E = \text{span}(t_1, \cdots, t_k)$ とする．

$u \in H - E$ とすると，定理2.1によって E は閉空間であるから，$v = u - P_E u$ を考えることができる．この v は $t_1, \cdots, t_k$ と直交する．だから $t_{k+1} = v / \| v \|$ とおくと，

（１） $\{t_1, \cdots, t_k, t_{k+1}\}$ は正規直交列

（２） $\text{span}(t_1, \cdots, t_k, t_{k+1}) = \text{span}(t_1, \cdots, t_k, u)$

一つの点 $u \in E, u \neq 0$ については，明らかに $\text{span}(u) = \text{span}(u / \| u \|)$ であるから，帰納法によって

定理 2.7（グラム・シュミットの直交化法） $\{u_n | n \in I\}$ を（有限または無限の）一次独立な H の点の列とする．このとき正規直交列 $\{t_n | n \in I\}$ をとって

$$\text{span}(u_1, \cdots, u_k) = \text{span}(t_1, \cdots, t_k)$$

とすることができる．

系 2.8 H の有限次元部分空間は閉部分空間である．

証明 定理2.1および2.7より明らか．□

補題 15. $t_1, \cdots, t_k$ を H の正規直交列とし，$E = \text{span}(t_1, \cdots, t_k)$ とする．このとき，すべての $x \in H$ に対して

$$P_E x = \sum_{i=1}^{k} (x, t_i) t_i$$

が成立する．

証明 $y = \sum_{i=1}^{k} (x, t_i) t_i$ とおくと，明らかに $y \in E$ である．したがって示すべきことは（補題4によって）$x - y \in E^{\perp}$ である．しかしこれは

$$(x - y, t_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

よりただちに導かれる．そしてそれは

---

†[訳注] J. Gram 多重共変式に関するGramの定理，$|{}^t\!AA|$ のような行列式Gramian等でも知られている．

††[訳注] E. Schmidt (1876-1959) Hilbet-Schmidtの積分作用素，展開法．または代数函数体上の類体論にも優れた結果がある．

$$\left(x-\sum_{i=1}^{k}(x, t_i)t_i, t_j\right)=(x, t_j)-\sum_{i=1}^{k}(x, t_i)(t_i, t_j)$$
$$=(x, t_j)-(x, t_j)$$
$$=0$$

となることより得られる. □

$H=l^2$ となる特別の場合に限ると, P_n は丁度 P_{H_n} のことである. それは $x\in l^2$, 例えば

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}a_je_j \qquad a_j\in C$$

とすると補題15によって

$$P_{H_n}(x)=\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_j(e_j, e_i)e_i\right)$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}a_j\left(\sum_{i=1}^{n}(e_j, e_i)e_i\right)$$

となる. さて,

$$\sum_{i=1}^{n}(e_j, e_i)e_i=\begin{cases}e_j & j\leq n\\ 0 & j>n\end{cases}$$

であるから,

$$P_{H_n}(x)=\sum_{j=1}^{n}a_je_j=P_nx$$

を得ることになる.

$\mathscr{E}$ で H の有限次部分空間の全体を記す. $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{P}(H)$ であるから $\mathscr{E}\in U$ である. 定理1-7.12によって ${}^*\mathscr{E}\subseteq{}^*\mathscr{P}(H)$ となる. $\dim(E)$ を E にその次元を対応させる函数とすれば, dim は $\mathscr{E}$ から N への函数と考えられる. このようにすると ${}^*\dim$ は ${}^*\mathscr{E}$ から ${}^*N$ への函数である. 移行原理より, もし $E\in{}^*\mathscr{E}$ で ${}^*\dim(E)=\nu$ ならば, 内点列 $\{t_i|1\leq i\leq\nu\}$ (E の基底) が存在して, すべての $1\leq i\leq\nu$ について $t_i\in{}^*H$ であり

$$E=\left\{\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_it_i\,\middle|\,\alpha_i\in{}^*C\right\} \tag{‡}$$

が成立する. さらに, もし E が ${}^*H$ の部分空間で $\{t_i|1\leq i\leq\nu\}$ が ${}^*H$ の内点列で性質 (‡) が成立すれば, $E\in{}^*\mathscr{E}$ で ${}^*\dim(E)\leq\nu$ となる. これより $E\in\mathscr{E}$ ならば $E\in{}^*\mathscr{E}$ であって $\dim(E)={}^*\dim(E)$ となる. これによって, 通常通り $*$ を省

略することができ，$E \in {}^*\mathscr{E}$ についても $\dim(E)$ 等と記すことができる．

H の有限次元の部分空間は閉部分空間であるから，$P_E x$ はすべての $E \in \mathscr{E}$，$x \in H$ に対して定義されている．したがって P を $\mathscr{E} \times H$ から H への函数とみなすことができる．よって ${}^*P$ は ${}^*\mathscr{E} \times {}^*H$ から ${}^*H$ への函数である．これより，すべての $E \in {}^*\mathscr{E}, x \in {}^*H$ について ${}^*P_E x$ を考えることができる．補題4と移行原理によると $E \in \mathscr{E}, x \in H$ については ${}^*P_E x = P_E x$ であるから，ここでも $*$ を省略して差支えない．

移行原理より射影子の色々の性質は $E \in {}^*\mathscr{E}$ に対する P_E についても成立する．例えば，$x \in E, E \in {}^*\mathscr{E}$ ならば $P_E x = x$ とか $\|P_E\| = 1$ 等のような関係が成立する．

終りに $H = l^2$ の場合にもどると，すべての $n \in N$ について $H_n \in \mathscr{E}$ で $\dim(H_n) = n$ であるから，$n \in {}^*N$ についても $H_n \in {}^*\mathscr{E}$ であり $\dim(H_n) = n$ である．

3. ベルンシュタイン・ロビンソンの定理

この節では有限次元線形代数の結果を，この章の残りの部分で用いられる無限次元の線形空間に応用するための技術を導入する．その考え方というのは，与えられた無限次元空間を近似するような $E \in {}^*\mathscr{E}$ をうまく探すことである．移行原理によって，有限次元の理論を近似する空間に応用し，ついには与えられた無限次元の空間にも応用しようというものである．

この節では，このような方法が，ベルンシュタインおよびロビンソンによって，永い間未解決のまま残っていた問題の解決にどのように用いられたかをたどってみよう．

最初に，いくらかのことばを導入しておこう．

定義　線形作用素 T は次のようなとき，**多項式的にコンパクト** (polynomially compact) とよばれる．すなわち，T は有界線形作用素で，ある多項式

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n,\quad c_0, \cdots, c_n \in C,\quad c_n \neq 0$$

に対して $P(T)$ がコンパクトとなることである．

定義　ユニタリー空間 H の線形部分空間 E について，$T[E] \subseteq E$ となるとき，E は作用素 T に関して**不変** (invariant) であるとよばれる．

1930年代にフォン．ノイマンはコンパクトな作用素は自明でない（すなわち

{0} でも全空間でもない) 不変空間を有するという事実を証明した (しかし公表されなかった). コンパクトでない作用素が自明でない不変空間を有するかどうかという問題については, しかしながらほとんど進展がなかった. そして 1966 年に至って超準的な方法によって次の定理が得られた：

定理 3.1 (ベルンシュタイン・ロビンソンの定理)　T を l^2 における多項式的にコンパクトな作用素とすると, l^2 の線形閉部分空間 E で, {0} でも l^2 でもなく T に関して不変となるものが存在する.

まず, いくらかの一般的な議論† から始めることにする. この節では我々は $H=l^2$ の場合のみ考える. $\{e_i \mid i\in N^+\}$ を l^2 のある正規直交系 (後でこの基底を定義することにしたい) とする. そして T を l^2 の線形作用素として

$$Te_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}e_j \qquad k=1,2,3,\cdots$$

と記することができる. このとき行列 $[a_{jk}]$ (これはもちろん $N^+\times N^+$ から C への一つの函数である) は T の**行列** (matrix) (この基底に関する) とよばれる. 例によって, a_{jk} は $j,k\in {}^*N^+$ について定義され $^*C$ の値をとると考えることができる.

補題 1.　$[a_{jk}]$ をコンパクトな作用素 T の行列とすると, $j\in {}^*N-N, k\in N^+$ に対して常に $a_{jk}\approx 0$ である.

証明　移行原理によると

$$Te_k=\sum_{i\in {}^*N^+}a_{ik}e_i$$

である. T はコンパクトで e_k は有限であるから Te_k は近準点である. (定理 4-2.1) すなわち $Te_k\approx y\in l^2$, ここに $y=\sum_{i\in N^+}y_ie_i$ である. ξ を次のようにおくと, ピタゴラスの定理によって,

$$\xi=\|Te_k-y\|^2=\left\|\sum_{i\in {}^*N^+}(a_{ik}-y_i)e_i\right\|^2$$
$$=\sum_{i\in {}^*N^+}|a_{ik}-y_i|^2$$

である. $Te_k\approx y$ であるから $\xi\approx 0$ である. $j\in {}^*N-N$ とすると明らかに

$$|a_{jk}-y_j|^2\leq \xi$$

であり, したがって

† Bernstein [3] にしたがう.

$$|a_{jk}-y_i|\leq\xi^{\frac{1}{2}}$$

これより

$$|a_{jk}|=|a_{jk}-y_j+y_j|\leq\xi^{\frac{1}{2}}+|y_j|$$

を得る．$y\in l^2$ で $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2$ は収束するのであるから $y_n\to 0$ である．よって $|y_j|\approx 0$．これより

$$|a_{jk}|\approx 0$$

を得る．□

定義　行列 $[a_{jk}]$ は

$$j>k+1 \quad ならば \quad a_{jk}=0$$

のとき，ほとんど**超対角的** (almost superdiagonal) とよばれる．

$[a_{jk}]$ がほとんど超対角的のとき，帰納的に

$$a_{jk}^{(1)}=a_{ik}$$

$$a_{jk}^{(n+1)}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}^{(n)}a_{ik}=\sum_{i\leq k+1}a_{ji}^{(n)}a_{ik}$$

と定義する．

補題 2.　有界作用素 T の行列 $[a_{jk}]$ がほとんど超対角的とする．このとき T^n の行列は $[a_{jk}^{(n)}]$ である．

証明　n に関する帰納法によって証明する．$n=1$ のときは自明である．n の場合成立すると仮定して $n+1$ の場合を証明する．T^{n+1} の行列を $[b_{jk}]$ とすると

$$\sum_{j=1}^{\infty}b_{jk}e_j=T^{n+1}e_k=T^n(Te_k)=T^n\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}e_i\right)$$

$$=T^n\left(\sum_{i\leq k+1}a_{ik}e_i\right)=\sum_{i\leq k+1}a_{ik}T^ne_i$$

$$=\sum_{i\leq k+1}a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ji}^{(m)}e_i\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i\leq k+1}a_{ji}^{(n)}a_{ik}\right)e_i$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}^{(n+1)}e_i \quad □$$

補題 3.　$[a_{jk}]$ をほとんど超対角的とする．$s, m, n>0$ に対して

（1）　$s<m$ ならば $a_{n+m,n}^{(s)}=0$

（2）　$a_{n+m,n}^{(m)}=\prod_{i=1}^{m-1}a_{n+i+1,n+i}$

証明（1）　s に関する帰納法で証明する．$s=1, m\geq 2$ に対して，$[a_{jk}]$ はほとんど超対角的であるから $a^{(1)}_{n+m,n}=a_{n+m,n}=0$ である．

性質(1)が s より小さいところで成立すると仮定する．このとき

$$s-1<m \quad ならば \quad a^{(s-1)}_{n+m,n}=0$$

であるが，定義より

$$a^{(s)}_{n+m,n}=\sum_{i\leq n+1} a^{(s-1)}_{n+m,i}a_{i,n}$$

である．しかし $i<n+1, s\leq m$ であるから，仮定よりすべての項は 0 となる．よって $a^{(s)}_{n+m,n}=0$ である．

（2）　m に関する帰納法による．$m=1$ に対しては自明である．$m-1$ の場合に成立するものと仮定する．すなわちすべての n に対して

$$a^{(m-1)}_{n+m-1,n}=\prod_{i=0}^{m-2} a_{n+i+1,n+i}$$

とする．すべての $i\leq n$ について $a^{(m-1)}_{n+m,i}=0$ であるから

$$\begin{aligned} a^{(m)}_{n+m,i} &= \sum_{i\leq n+1} a^{(m-1)}_{n+m,i}a_{i,n}=a^{(m-1)}_{n+m,n+1}a_{n+1,n} \\ &=\left(\prod_{i=0}^{m-2} a_{n+i+2,n+i+1}\right)a_{n+1,n} \\ &=\prod_{i=0}^{m-1} a_{n+i+1,n+i} \quad \square \end{aligned}$$

補題 4.　T を l^2 上の多項式的にコンパクトな作用素とし，その行列 $[a_{jk}]$ がほとんど超対角的とする．このとき，ある無限整数 ν に対して $a_{\nu+1,\nu}\approx 0$ となる．

証明　$p(T)=\alpha_0+\alpha_1 T+\cdots+\alpha_m T^m$ がコンパクトでその行列が $[a_{jk}]$ であるとする．補題2によると，

$$\alpha_{n+m,n}=0+\alpha_1 a^{(1)}_{n+m,n}+\cdots+\alpha_m a^{(m)}_{n+m,n}$$

補題3の(1),(2)を用いると

$$b_{n+m,n}=\alpha_m a^{(m)}_{n+m,n}=\alpha_m\prod_{i=0}^{m-1} a_{n+i+1,n+i}$$

$p(T)$ はコンパクト作用素であるから，補題1によって，無限の n に対しては $b_{n+m,n}\approx 0$ となるので，このような n を一つとる．このときは $a_{n+i+1,n+i}$, $i=0,\cdots,m-1$ の中少なくとも一つは無限小でなくてはならない．これより所要の結果を得る．□

定義　$E\in{}^*\mathscr{E}$ とする．${}^\circ E$ で $x\in l^2$ で $x\approx y\in E$ なる y が存在する x の全体の集合とする．

補題 5. $^\circ E$ は l^2 の線形閉部分空間である.

証明 $x, y \in {}^\circ E, \lambda \in C$ とする. $x \approx x' \in E, y \approx y' \in E$ なる x', y' が存在する. したがって $x+y \approx x'+y' \in E, \lambda x \approx \lambda x' \in E$. これより $x+y, \lambda x \in {}^\circ E$ となる.

次に $^\circ E$ が閉部分空間であることを示す. すなわち x が $^\circ E$ の極限点 ならば $x \in {}^\circ E$ を示せばよい. $n \in N^+$ とすると, $x' \in {}^\circ E$ が存在して $\|x-x'\|<1/2n$, $x' \approx y \in E$ となる y が存在するから, $\|x'-y\|<1/2n$ である. したがって, $\|x-y\|<1/n$ である. そこで

$$K=\left\{n \in {}^*N^+ \mid * \models (\exists \mathbf{y} \in \mathbf{E})\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)\right\}$$

を考えると, K は内集合であって, $N^+ \subseteq K$ となるから, ある無限整数 ν を含む. すなわち, ある $y \in E$ に対して $\|x-y\|<1/\nu$ となる. これは $x \in {}^\circ E$ を意味している. □

有限次元の線形代数の次のような基礎定理を用いる (例えば Halmos [5] 56 節).

不変定理 E を有限次元線形空間としその次元を m とする. E の線形作用素 T に対して, 次のような T 不変な部分空間 E_i の鎖

$$\{0\}=E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m=E$$

で $\dim(E_i)=i$ となるものが存在する.

この結果は, 線形作用素 T がある基底に関して“三角行列”で表現できるということと同値である.

我々は, 移行原理と補題 5 を用いて l^2 の不変部分空間を求めようとしているわけである.

補題 6. $x \in l^2, E \in {}^*\mathscr{E}$ とすると, $x \in {}^\circ E$ と $x \approx P_E x$ は同値である.

証明 もし $x \approx P_E x$ ならばもちろん $x \in {}^\circ E$ である. 逆に $x \in {}^\circ E$ ならば $x \approx y \in E$ となる y が存在する. P_E の定義と移行原理によって

$$\|x-P_E x\| \leq \|x-y\| \approx 0$$

となる. □

T を l^2 の与えられた有界作用素とする. $\nu \in {}^*N-N$ として H_ν, P_ν を第 1 節におけると同様とする. そして $T_\nu=P_\nu T P_\nu$ とし, $\tilde{T}$ を T_ν の H_ν への制限とする. このとき, T_ν は $^*l^2$ の線形作用素, $\tilde{T}$ は H_ν 上の線形作用素で

$$\|\tilde{T}\| \leq \|T_\nu\| \leq \|P_\nu T P_\nu\| \leq \|T\|$$

が成立する. また $H_\nu \in {}^*\mathscr{E}$ であるから, すべての内的な H_ν の部分空間 E につ

いて $E\in{}^*\mathscr{E}$ である．

補題 7． E を H_ν の線形部分空間とする．このとき，

$$T_\nu[E]\subseteq E \quad \text{ならば} \quad T[{}^\circ E]\subseteq{}^\circ E$$

証明　$x\in{}^\circ E$ ならば $Tx\in{}^\circ E$ を示す．$x\in{}^\circ E$ とすると補題6によって $P_E x\approx x$ である．T は連続であったから，$TP_E x\approx Tx$ となり $TP_E x$ は近準点である．定理1.8により $P_\nu(TP_E x)\approx TP_E x$ となる．

さて，

$$T_\nu P_E x=P_\nu TP_\nu P_E x=P_\nu TP_E x\approx TP_E x\approx Tx$$

が成立する．しかし $P_E x\in E$ であるから，仮定により $T_\nu P_E x\in E$ である．したがって，Tx は E の点（すなわち $T_\nu P_E x$）と無限に近い．よって $Tx\in{}^\circ E$ である．□

補題 8． $E, F\in{}^*\mathscr{E}, E\subset F$ であり $\dim(F)=\dim(E)+1$ とすると，${}^\circ E\subseteq{}^\circ F$ である，$x, y\in{}^\circ F$ に対しては，$\lambda\in C, z\in{}^\circ E$ が存在して

$$x=\lambda y+z \quad \text{または} \quad y=\lambda x+z$$

が成立する．

証明　$x\in{}^\circ E$ とすると $x\approx y\in E$ となる y が存在する．$E\subseteq F$ であるから $y\in F$ であり $x\in{}^\circ F$ となる．すなわち ${}^\circ E\subseteq{}^\circ F$ である．

$x, y\in{}^\circ F$ とすると $x\approx x'\in F, y\approx y'\in F$ となる x', y' が存在する．$E, F\in{}^*\mathscr{E}$ であり $\dim(F)=\dim(E)+1$ であるから，移行原理によって

$$y'=\lambda x'+z \qquad (\text{または } x'=\lambda y'+z)$$

となる $\lambda\in{}^*C$，$z\in E$ が存在する．ここで二つの場合を考える．

場合 1　λ が有限のとき：

x', y', λ は近準点であれから

$$z=y'-\lambda x' \qquad (\text{または } z=x'-\lambda y')$$

すなわち

$$\begin{aligned} {}^\circ z &= {}^\circ y'-{}^\circ(\lambda x') & ({}^\circ z &= {}^\circ x'-{}^\circ(\lambda y')) \\ &= y-{}^\circ\lambda x & (&= x-{}^\circ\lambda y) \end{aligned}$$

したがって，

$$y={}^\circ\lambda x+{}^\circ z \qquad (x={}^\circ\lambda y+{}^\circ z)$$

そして ${}^\circ z\in E$ である．

場合 2　λ が無限のとき，

$$x' = \frac{1}{\lambda}y' - \frac{1}{\lambda}z \qquad \left(または\ y' = \frac{1}{\lambda}x' - \frac{1}{\lambda}z\right)$$

しかし $z \in E$ であるから $\frac{1}{\lambda}z \in E$ となり，場合 1 にもどればよい．□

さて，ベルンシュタイン・ロビンソンの定理の証明の用意が備った．そこで $x \in l^2$ で $\|x\|=1$ となるものを固定して，集合

$$A = \{x,\ Tx,\ T^2x,\ \cdots\}$$

を考える．このとき，二つの自明な場合を除くことから始めよう．

場合 1　A が線形独立でないとき：

k を次のような最小の自然数とする．すなわち

$$T^k x = \alpha_1 x + \alpha_2 Tx + \cdots + \alpha_k T^{k-1}x, \qquad \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in C \tag{1}$$

とする．このとき，

$$E = \mathrm{span}(x,\ Tx,\ \cdots,\ T^{k-1}x)$$

はベルンシュタイン・ロビンソンの定理の条件を満足していることを示す．

明らかに，$x \in E, \|x\|=1$ であるから $E \neq \{0\}$. E は有限次元であるから閉集合 (系2.8) であり $\neq l^2$ でもある．

$a \in E$ とすると，

$$a = \beta_1 x + \beta_2 Tx + \cdots + \beta_k T^{k-1}x \tag{2}$$

したがって

$$Ta = \beta_1 Tx + \beta_2 T^2x + \cdots + \beta_k T^k x \tag{3}$$

であるが，性質(1)によって $Ta \in E$ である．

場合 1 のときはそれでよいから，A は一次独立と仮定する．

$G_n = \mathrm{span}(x,\ Tx,\ \cdots,\ T^{n-1}x)$ とおき，

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \qquad F = \overline{E}$$

とおく．定理2.2によって F は l^2 の線形閉部分空間である．

場合 2　$F \neq l^2$

明らかに $F \neq \{0\}$ である．そこで F が T 不変であることを示す．$a \in E$ であれば，a を(2)の形に表現すれば，Ta は(3)の形で表現できるので $Ta \in E$ となる．次に $a \in F$ とすると，$\{a_n | n \in N^+\}$ となる E の点列が存在して $a_n \to a$ となる．しかし，このときは $Ta_n \to Ta$ であり $Ta \in F$ となる．

証明すべき本質的な場合は

場合 3　$F = l^2$

集合 A は一次独立であるから，点列

$$f_i = T^{i-1}x, \qquad i=1,2,3,\cdots$$

は l^2 の基底をなす．グラム•シュミットの直交化法 (定理2.7) を $\{f_i\}$ に用いると l^2 の次のような正規直交基底を得る．すなわち，すべての $n \in N^+$ について

$$\operatorname{span}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \operatorname{span}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

が成立する．この正規直交基底を用いて証明を完成しようというのである．

さて，すべての $k \in N^+$ について

$$e_k \in \operatorname{span}(f_1, \cdots, f_k)$$

であるから

$$Te_k \in \operatorname{span}(f_2, \cdots, f_{k+1}) \subseteq \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1})$$

T のこの正規直交基底 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ に関する行列を $[a_{jk}]$ とすると

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}e_j = \sum_{j=1}^{k+1} a_{jk}e_j$$

であるから $[a_{jk}]$ はほとんど超対角的である．T が多項式的にコンパクトであると仮定すると，補題 4 によって，無限の ν (しばらく固定) が存在して $a_{\nu+1,\nu} \approx 0$ となる．

次に $\tilde{T}$ が T のよい近似になっていることを示す．

補題 9.　$\xi \in H_\nu$ で ξ が有限ならば $T\xi \approx \tilde{T}\xi$ である．

証明　$H_\nu = \operatorname{span}(e_1, \cdots, e_\nu)$ であるから

$$\xi = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k e_k \qquad \alpha_k \in {}^*C$$

となる．ピタゴラスの定理より

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\nu} |\alpha_k|^2 \geq |\alpha_\nu|^2$$

であるから α_ν は有限である．また $[a_{jk}]$ はほとんど超対角的であるから

$$T\xi = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k Te_k = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sum_{j=1}^{k+1} a_{jk}e_j = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \sum_{j=1}^{\nu+1} a_{jk}e_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\nu+1} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j$$

したがって

$$P_\nu T\xi = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{jk} \right) e_j$$

これより，ほとんど超対角的であることを用いると

$$T\xi = P_\nu T\xi + \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k a_{\nu+1,k} e_{\nu+1}$$
$$= P_\nu T\xi + \alpha_\nu a_{\nu+1,\nu} e_{\nu+1}$$

したがって，$|\alpha_\nu|$ が有限ということを用いると

$$\| T\xi - \tilde{T}\xi \| = \| T\xi - T_\nu \xi \| = |\alpha_\nu| \cdot | a_{\nu+1,\nu} | \approx 0$$

を得る．□

補題 10． $\xi \in H_\nu$ で ξ が有限ならば，すべての $n \in N^+$ について

$$T^n \xi \approx \tilde{T}^n \xi$$

証明 $n=1$ の場合は補題 9 で示されている．$n-1$ の場合成立するものと仮定すると $\| \tilde{T}^{n-1}\xi \| \leq \| T \|^{n-1} \cdot \| \xi \|$ は有限である．それゆえ，帰納法の仮定と T の連続性および補題 9 を用いると

$$T^n \xi = T(T^{n-1}\xi) \approx T(\tilde{T}^{n-1}\xi)$$
$$\approx \tilde{T}(\tilde{T}^{n-1}\xi) = \tilde{T}^n \xi$$

を得る．□

さて $p(\lambda)$ を $p(T)$ がコンパクトとなるように与えられた多項式とする．

補題 11． $\xi \in H_\nu$ で ξ が有限ならば

$$p(T)\xi \approx p(\tilde{T})\xi$$

証明 補題 10 より明らかである．□

補題 12． $p(T_\nu)$ は ${}^*l^2$ 上局所連続である．

証明 $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{g} \alpha_i \lambda^i$ とする．定理 4-1.11 を用いると

$$\| p(T_\nu) \| \leq \sum_{i=0}^{g} |\alpha_i| \cdot \| T_\nu \|^i \leq \sum_{i=0}^{g} |\alpha_i| \cdot \| T \|^i = M$$

ここに M は正の実数である．これより $u, v \in {}^*l^2$, $u \approx v$ ならば

$$\| p(T_\nu)u - p(T_\nu)v \| \leq \| p(T_\nu) \| \cdot \| u - v \|$$
$$\leq M \cdot \| u - v \| \approx 0 \quad □$$

補題 13． $p(T_\nu)x \approx 0$

証明 $p(T)x \fallingdotseq 0$ である．そうでなければ $T^i x$ が線形従属となってしまう．定理 1.8 によって $P_\nu x \approx x$ であるから，$P(T)$ が有界線形作用素（定理 4-1.11）であることより

$$p(T)P_\nu x \approx p(T)x$$

補題 12 によって

$$p(T_\nu)P_\nu x \approx p(T_\nu)x$$

補題 11 によって

$$p(T_\nu)P_\nu x \approx p(T)P_\nu x$$

であるから，${}^\circ(p(T_\nu)x)=p(T)\neq 0$ を得る．□

さて，以前引用した有限次元線形代数の不変空間定理を用い，移行原理を用いると，空間よりなる内列

$$\{0\}=E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_\nu = H_\nu$$

で，$\dim(E_i)=i$ であり

$$\tilde{T}[E_i] \subseteq E_i, \qquad i=0, 1, \cdots, \nu$$

となるものが存在する．

$H_\nu \in {}^*\mathscr{E}$ であるから $E_i \in {}^*\mathscr{E}$ となり P_{E_i} は定義されている．(2 節の終りの部分の議論を思い出してほしい) そこで，超実数の内点列 $\{r_j \mid j=0, 1, \cdots, \nu\}$ を

$$r_j = \| p(T_\nu)x - p(T_\nu)P_{E_j}x \|$$

によって定める．

さて，$E_0=\{0\}$ であるから $P_{E_0}=0$ であり $r_0=\|p(T_\nu)x\|$ となる．補題 13 によると $r_0>r$ となる正の実数が存在する．他方 $P_{E_\nu}=P_{H_\nu}=P_\nu$ であるから，補題 12 によって

$$r_\nu = \| p(T_\nu)x - p(T_\nu)P_{E_\nu}x \| \approx 0$$

となり，もちろん $r_\nu < \frac{1}{2}r$ である．定理 1-8.3 によると，

$$r_\mu < \frac{1}{2}r < r_{\mu-1}$$

となる μ が存在する．

さて，補題 5 および 7 によると ${}^\circ E_j, j=0, 1, \cdots, r$ は T に関して不変な l^2 の線形閉部分空間である．したがって，これらの中の少なくとも一つは自明でないことを示せばよい．事実，${}^\circ E_{\mu-1}$ または ${}^\circ E_\mu$ の一方は自明でないのである．

補題 14 $x \notin {}^\circ E_{\mu-1}$ であるから ${}^\circ E_{\mu-1} \neq l^2$.

証明 $x \in {}^\circ E_{\mu-1}$ とすると補題 6 によって $x \approx P_{E_{\mu-1}}x$ となる．しかし補題 12 によると，

$$r_{\mu-1} = \| p(T_\nu)x - p(T_\nu)P_{E_{\mu-1}}x \| \approx 0$$

となるので $r_{\mu-1} \geq \frac{1}{2}r > 0$ に矛盾する．□

補題 15. ${}^\circ E_\mu \neq \{0\}$

証明 $y=p(T_\nu)P_{E_\mu}x$ とする．E_μ は $\tilde{T}$ で不変 (したがって $p(\tilde{T})$ で不変) で

あるから，補題 11 によって $y\approx p(T)P_{E_\mu}x$ である．さて $p(T)$ はコンパクトで $p_{E_\mu}x$ は有限であるから，(定理 4-2.1) $p(T)P_{E_\mu}x$ は近準点である．したがって y も近準点である．

$y\approx z\in l^2$ とすると $z\in {}^\circ E_\mu$ である．したがって $z\neq 0$ を示せば十分である．そこで $z=0$ とすると $y\approx 0$ となるが，$r_\mu\approx\|p(T_\nu)x\|>r$ となって，$r_\mu<\dfrac{1}{2}r$ と矛盾する．□

補題 14, 15 によると，もし ${}^\circ E_{\mu-1}, {}^\circ E_\mu$ が共に自明ならば

$$ {}^\circ E_{\mu-1}=\{0\}, \quad {}^\circ E_\mu=l^2 $$

でなければならない．しかし $\dim(E_\mu)=\dim(E_{\mu-1})+1$ であるから，補題 8 によって，任意の $x, y\in l^2$ に対して $y=\lambda x$ または $x=\lambda y$ となる $\lambda\in C$ が存在することになり，もちろん矛盾である．これより ${}^\circ E_{\mu-1}$ または ${}^\circ E_\mu$ は自明でなくなり，ベルンシュタイン・ロビンソンの定理が証明できたのである．□

4. コンパクトなエルミート作用素のスペクトル定理

この節では，3 節での不変空間を構成するために用いた，有限次元の上からの近似の技術を用いて，コンパクトなエルミート作用素のスペクトル分解の古典的結果を導いてみようと思う．

今回は，任意に与えられたヒルベルト空間から始めて，共起性定理を用いて $E\in {}^*\mathscr{E}$ (2 節の終りの論議) なる空間で

$$ H\subset E\subset {}^*H $$

となるものを構成する．すなわち H はあたかも有限次元のごとく振舞う空間の中に埋め込まれるわけである．

それには

$$ r=\{\langle x, E\rangle \mid x\in E, E\in\mathscr{E}\} $$

とおくと，$x\in H$ に対して $\langle x, \mathrm{span}(x)\rangle\in r$ であるから $\mathrm{dom}(r)=H$ であり，さらに $x_1, \cdots, x_n\in H$ ならば

$$ \langle x_i, \mathrm{span}(x_1, \cdots, x_n)\rangle\in r \qquad i=1, \cdots, n $$

となるから r は共起的である．したがって共起性定理によって E が存在して

$$ \text{すべての } x\in H \text{ について } \langle x, E\rangle\in {}^*r $$

とする．移行原理によって $E\in {}^*\mathscr{E}$ であり，すべての $x\in H$ に対して $x\in E$ で

ある．すなわち $H\subseteq E$ となる．

この章の残りの部分では，E はこのようにして得られた空間とし，$P=P_E$ と記すことにする．

補題 1． $x\in{}^*H$ が近準点ならば $Px\approx x$ である．

証明 $x=y+\delta, y\in H$ かつ $\delta\approx 0$ とすると，$y\in E$ かつ $\|P\delta\|\leq\|\delta\|\approx 0$ によって $Px=Py+P\delta=y+P\delta\approx y\approx x$ となる．□

T を H 上のある有限作用素とする．T' で PT を E に制限したものとする．$x\in E$ について $Px=x$ であるから，T' は PTP を E に制限したものといっても同じである．

補題 2． $\|T'\|\leq\|T\|$ であり，$x\in H$ ならば $T'x=Tx$ である．

証明
$$\|T'\|\leq\|PT\|\leq\|P\|\cdot\|T\|\leq\|T\|$$
また，$x\in H$ とすると，$Tx\in H\subseteq E$ によって $T'x=PTx=Tx$ である．□

補題 3． T が H 上でエルミート的であれば，T' は E 上でエルミート的である．

証明 $x, y\in E$ とすると，
$$\begin{aligned}(T'x, y)&=(PTPx, y)=(TPx, Py)=(Px, TPy)\\&=(x, PTPy)=(x, T'y)\end{aligned}$$
□

これより後この節では，$T'\neq 0$ でヒルベルト空間 H 上のコンパクトなエルミート作用素とする．すなわち T' は E 上のエルミート作用素で $\|T'\|\leq\|T\|$ である．

補題 4． $x\in E$ が有限ならば $T'x$ は近準点である．

証明 T がコンパクトならば，定理4-2.1によって Tx は近準点である．補題1によって，$T'x=PTx\approx Tx$ となり $T'x$ は近準点である．□

ユニタリー空間での作用素Uに対する**固有方程式**(eigenvalue equation)とは
$$(\lambda I-U)x=0$$
をいう．もし，与えられた $\lambda\in C$ に対して $x\neq 0$ がこの等式を満足するとき，これらは，それぞれ U の**固有値**(eigenvalue)とそれに応ずる(Uの)**固有ベクトル**(eigenvector)とよばれる．

有限次元のエルミート作用素の固有値に関する理論は，移行原理によって，E 上のエルミート作用素 T' についても適用することができる．すなわち T' の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ (重複も許して)

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_\nu|$$

となるようにとることができる．(移行原理によって)それらに応ずる固有ベクトル $r_1, r_2, \cdots, r_\nu$ で正規直交基底となるものが存在する．(すなわち $i \neq j$ ならば $(r_i, r_j)=0, \|r_i\|=1$)　そして λ_i, r_i は固有方程式

$$(\lambda_i I - T')r_i = 0$$

を満足する．または同値な式であるが，

$$T' r_i = \lambda_i r_i$$

が $i=1, 2, \cdots, \nu$ について成立する．

補題 5.　すべての $i \leq \nu$ について $|\lambda_i| \leq \|T\|$，したがってすべての λ_i は有限である．

証明　$\|r_i\|=1$ であるから

$$|\lambda_i| = \|\lambda_i\| \cdot \|r_i\| = \|\lambda_i r_i\| = \|T' r_i\| \leq \|T'\| \cdot \|r_i\| \leq \|T\| \qquad \square$$

補題 6.　$\lambda_j \not\approx 0$ ならば，r_j は近準点である．

証明　固有方程式より $T' r_j = \lambda_j r_j$ である．補題 4 より $\lambda_j r_j$ は近準点であるから，$\lambda_j r_j \approx t_j \in H$ とする．$\mu_j = {}^\circ(\lambda_j) \neq 0$ とおくと

$$r_j = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)\lambda_j r_j \approx \frac{1}{\mu_j} t_j \in H$$

となり r_j は近準点である．$\square$

補題 7.　ε を正実数，$j \leq k$ ならば $|\lambda_j| \geq \varepsilon$ とすると，$k \in N^+$ である．

証明　$|\lambda_j| \geq \varepsilon$ とすると $\lambda_j \not\approx 0$ である．したがって補題 6 によって，すべての $j \leq k$ について r_j は近準点である．ピタゴラスの定理によって

$$i, j \leq k, i \neq j \quad \text{ならば} \quad \|r_i - r_j\| = \sqrt{2}$$

となる．そこで $k \in {}^*N - N$ とする．

$$s_i = \begin{cases} r_i & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

とおくと，$i, j \in N, i \neq j$ ならば $\|s_i - s_j\| \geq \sqrt{2}$ となる．したがって定理 3-5.21 によって，s_i が近準点でない $i \leq k$ が存在する．しかし，これは r_i が近準点であることに反する．$\square$

補題 8.　$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_{r+k} \not\approx 0$ とすると $k \in N^+$ である．

証明

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_{r+k}|$$

であるから，$j \leq k+r$ に対して $|\lambda_j| \geq |\lambda_{r+k}| \geq \varepsilon$ となる正実数がある．補題 7 によって $r+k \in N^+$，よって $k \in N^+$ となる．$\square$

さて，$\{\lambda_i | i \leq \nu\}$ の番号を付け替えて，操返しのない列 $\{\chi_i | i \leq \mu\}$ とする．すなわち χ_i は少なくとも一つの λ_j と同一であって

$$|\chi_1| \geq |\chi_2| \geq \cdots \geq |\chi_\mu|$$

とする．もちろん $\mu \leq \nu$ となる．そして χ_j に応ずる固有ベクトルを $r_1^{(j)}, \cdots, r_{m_j}^{(j)}$ とする．

$$E_j = \mathrm{span}(r_{r_1}^{(j)}, \cdots, r_{m_j}^{(j)})$$

とすると，移行原理により E_j は E の線形部分空間であり（χ_j の**固有空間** (eigenspace)）有限次元空間のスペクトルに関する定理（たとえば Halmos [5] p. 156）を用い，T' が E 上のエルミート作用素であること，および移行原理によって

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_\mu$$

を得る．系2.4によって

$$P = P_{E_1} + P_{E_2} + \cdots + P_{E_\mu}$$

である．これを用いて T' の**スペクトル分解** (spectral resolution) を得ることができる．

この等式が成立することは，$u \in E_j$ ならば $Tu = \chi_j u$ であることに注意すれば

$$u = \alpha_1 r_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j} r_{m_j}^{(j)}$$

については

$$\begin{aligned} T'u &= \alpha_1 T' r_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j} T' r_{m_j}^{(j)} \\ &= \alpha_1 \chi_j r_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j} \chi_j r_{m_j}^{(j)} \\ &= \chi_j (\alpha_1 r_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j} r_{m_j}^{(j)}) = \chi_j u \end{aligned}$$

となるからである．したがって

$$\begin{aligned} T'x = T'Px &= T'(P_{E_1}x + P_{E_2}x + \cdots + P_{E_\mu}x) \\ &= \chi_1 P_{E_1}x + \chi_2 P_{E_2}x + \cdots + \chi_\mu P_{E_\mu}x \end{aligned}$$

となる．

補題 9. ある $b \in E$ と $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\|b\| \leq 1, \qquad \|T'b\| > \varepsilon$$

が成立する．

証明 $T \neq 0$ であるから，$c \in H$, $c \neq 0$ で $Tc \neq 0$ となるものが存在する．$a = c/\|c\|$, $\alpha = \|Ta\|$ とおくと $\alpha = \|Tc\|/\|c\| > 0$ である．$b = p_E a \in E$ とおくと a

は標準的であるから補題 4 によって $b \approx a$ であり，$Tb \approx Ta$ となる．したがって

$$\| Tb\| \approx \| Ta\| = \alpha\ ;\ \| Tb\| > \frac{1}{2}\alpha$$

これより

$$\| T'b\| = \| TPb\| \approx \| Tb\| > \frac{1}{2}\alpha$$

を得る． Tb は近準点であるから

$$\| T'b\| > \frac{1}{4}\alpha$$

そして

$$\| b\| = \| Pa\| \leq \| a\| = 1$$

も成立する． □

さて

$$W = \{j \in {}^*N^+ \mid x_j \not\approx 0\}$$

とする． この定義の中に外的 (external) な記号 "≈" が用いられているので，W は一般には内集合ではない．しかし次に見るように W は有限の数のみより成るのである．

補題 10． $W \neq \phi$

証明 $W = \phi$ とすると，すべての $j \in {}^*N^+$ について $x_j \approx 0$ である．すなわち $x = |x_1| \approx 0$ である． そこで，$b \in E$, $\varepsilon > 0$ を補題 9 のようにとる．すでに得られた性質によって

$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_\mu$$
$$T'b = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_\mu b_\mu$$

となる． したがって，ピタゴラスの定理によって

$$\| T'b\|^2 = \sum_{i=1}^{\mu} |x_i|^2 \cdot \| b_i\|^2 \leqq x^2 \sum_{i=1}^{\mu} \| b_i\|^2$$
$$= x^2 \cdot \| b\|^2 \leq x^2 \approx 0$$

となり，補題 9 と矛盾する． □

補題 11． $W \subseteq N^+$

証明 $m \in W$ とすると，正数 ε について $|x_m| \geq \varepsilon$ となる．したがって，すべての $j \leq m$ について $|x_j| \geq \varepsilon$ となり，補題 7 によって $m \in N^+$ となる． □

さて，$m \in W$ かつ $1 \leq j \leq m$ ならば $j \in W$ となることは明らかである．したがって補題 10, 11 によって

$$W=N^+ \qquad (\text{この場合は外集合})$$

または，ある $k\in N^+$ について

$$W=\{1, 2, \cdots, k\} \qquad (\text{この場合は内集合})$$

となる．我々は W が有限と無限の場合に分けて分析してゆく．

補題 12. $x\in {}^*H$ が近準点ならば $T'Px\approx Tx$ である．

証明 補題1によって $Px\approx x$，それゆえ

$$Tx\approx TPx.$$

また Tx は近準点であるから (定理4-1.10)，TRx も近準点である．補題1を再び用いると $TPx\approx PTPx$．すなわち

$$Tx\approx PTPx\approx T'Px. \quad \square$$

補題 13. $u, v\in {}^*H$ が近準点ならば ${}^\circ(u, v)=({}^\circ u, {}^\circ v)$ である．

証明 これは内積が連続であるということの超準解析での記述に外ならない．□

定理 4.1 もし $\lambda_j\neq 0$ ならば λ_j は有限で，r_j は近準点であり，各 ${}^\circ\lambda_j, {}^\circ r_j$ は H における T の対応する固有値と固有ベクトルである．

証明 補題5および6によって λ_j は有限で r_j は近準点である．補題12および $Pr_j=r_j$ を用いると

$$\begin{aligned} T{}^\circ r_j &\approx Tr_j\approx T'Pr_j=T'r_j \\ &=\lambda_j r_j\approx {}^\circ\lambda_j {}^\circ r_j. \end{aligned}$$

そして ${}^\circ r_j\neq 0$ であるから，補題13によって

$$({}^\circ r_j, {}^\circ r_j)={}^\circ(r_j, r_j)=1 \quad \square$$

また $\lambda_i, \lambda_j\neq 0$ であれば

$$({}^\circ r_i, {}^\circ r_j)={}^\circ(r_i, r_j)=\delta^i_j \tag{‡}$$

であることにも注意しておこう．

さて，補題6および8によって，$j\in W$ に対しては

$$r^{(j)}_1, \cdots, r^{(j)}_{m_j}$$

はすべて近準点であり，m_j は有限である．そこで $s^{(j)}_i={}^\circ r^{(j)}_i$, $i=1, 2, \cdots, m_j$ とし

$$\tilde{H}_j=\mathrm{span}(s^{(j)}_1, \cdots, s^{(j)}_{m_j})\subseteq H$$

とする．そうすれば性質 (‡) によって $\{s^{(j)}_i \mid 1\leq i\leq m_j\}$ は正規直交基底であり，したがって線形独立でもある．すなわち $\tilde{H}_j$ は m_j 次元であり，(‡) を用いると $j, k\in W, j\neq k$ ならば

$$\tilde{H}_j \perp \tilde{H}_k$$

が成立している．さらに2節，補題15によって

$$P_{H_j}x=\sum_{i=1}^{m_j}(x,\ s_i^{(j)})s_i^{(j)}.$$

補題 14.　$x\in H, j\in W$ については $P_{H_j}x\approx P_{E_j}x$ である．

証明　補題13，2節補題15および移行原理によって

$$P_{\tilde{H}_j}x=\sum_{i=1}^{m_j}(x,\ s_i^{(j)})s_i^{(j)}\approx\sum_{i=1}^{m_j}(x,\ r_i^{(j)})r_i^{(j)}=P_{E_j}x$$

が成立する．□

さて，

$$K=\tilde{H}_1\oplus\tilde{H}_2\oplus\cdots$$

とおく．もちろんこの直和は W が有限か無限かに応じて有限または無限である．

そして $\tilde{H}_0=K^{\perp}$ とおく．このようにすると，2節での議論（系2.4または補題14）によって

$$H=\tilde{H}_0\oplus\tilde{H}_1\oplus\tilde{H}_2\oplus\cdots$$

であり，すべての $x\in H$ に対して

$$x=P_{\tilde{H}_0}x+P_{\tilde{H}_1}x+P_{\tilde{H}_2}x+\cdots$$

が成立する．

すべての $j\in W$ に対して $\nu_j={}^\circ\chi_j$ とおくと，次の定理を得る．

定理 4.2（コンパクト•エルミート作用素のスペクトル定理，その1）　$W=\{1, 2, \cdots, k\}$ であれば T の固有値は $0, \nu_1, \cdots, \nu_k$ であって

$$T=\nu_1P_{\tilde{H}_1}+\nu_2P_{\tilde{H}_2}+\cdots+\nu_kP_{\tilde{H}_k}.$$

証明　$x\in H$ に対する Tx の計算から始めよう．補題2によって $Tx=T'x$ であるから，T' のスペクトル分解によって

$$Tx=\sum_{j\leq\mu}\chi_jP_{E_j}x=\sum_{j=1}^{k}\chi_jP_{E_j}x+\sum_{j=k+1}^{\mu}\chi_jP_{E_j}x$$
$$=I+II$$

とおく．補題14によって

$$I\approx\sum_{\nu=1}^{k}\nu_jP_{\tilde{H}_j}x.$$

それゆえ，示すべきことは $II\approx 0$ となることであるが，ピタゴラスの定理より

$$\|II\|^2=\left\|\sum_{j=k+1}^{\mu}\chi_jP_{E_j}x\right\|=\sum_{j=k+1}^{\mu}|\chi_j|^2\cdot\|P_{E_j}x\|$$

$$\leq |\varkappa_{k+1}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\mu} \| P_{E_j} x \|^2 = |\varkappa_{k+1}|^2 \cdot \| x \| \approx 0.$$

ここで，最後の部分で

$$x = \sum_{j=1}^{\mu} P_{E_j} x$$

を用いている．

次に 0 が T の固有値であることは，$x \in \tilde{H}_0$ については

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} \nu_j P_{H_j} x = 0$$

となることからわかる．

終りに，λ を T の固有値で r をそれに応ずる固有ベクトルとする．示すべきことは $\lambda \neq 0$ ならば $\lambda = \nu_j$, $j = 1, \cdots, k$ となるものが存在することである．

さて

$$\lambda r = \lambda \sum_{j=1}^{k} P_{\tilde{H}_j} r$$

であり

$$\lambda r = Tr = \sum_{j=1}^{k} \nu_j P_{\tilde{H}_j} r$$

となるから，直和分解の一意性によって，

$$\lambda P_{\tilde{H}_0} r = 0, \quad \lambda P_{\tilde{H}_j} r = \nu_j P_{\tilde{H}_j} r, \quad j > 0$$

が成立する．もし $\lambda \neq 0$ ならば $P_{\tilde{H}_0} r = 0$ であるから，唯一つの $j > 0$ に対して $P_{\tilde{H}_j} r \neq 0$ でなくてはならない．すなわち $\lambda = \nu_j$ である． □

W が無限である場合は全く同様とまではゆかなくて：

定理 4.3（コンパクト・エルミート作用素のスペクトル定理，その 2） $W = N^+$ であれば，すべての $x \in H$ について

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i P_{\tilde{H}_i} x.$$

最初に

補題 15. $W = N^+$ ならば $\lim_{j \to \infty} \nu_j = 0$ である．

証明 すべての $j \in N^+$ について $|\nu_j| \approx |\varkappa_j|$ であるから，無限小延長定理によって，ある無限大整数 n に対して $|\nu_n| \approx |\varkappa_n|$ であり，また $|\varkappa_n| \approx 0$ でもあったから，0 は $\{|\nu_j| \mid j \in N^+\}$ の一つの極限点である．他方において，この列は単調減少（$\{|\varkappa_j| \mid j \in N^+\}$ は単調減少であり $\nu_j = {}^\circ\varkappa_j$）だから，収束する．よって $|\nu_j| \to 0$ である． □

定理の証明　$x \in H$ として

$$s_n = \left\| Tx - \sum_{j=1}^{n} \nu_j P_{\tilde{H}_j} x \right\|$$

とおく．証明したいことは，$s_n \to 0$ ということである．

さて，補題14によって，n が有限のときは

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j P_{\tilde{H}_j} x \approx \sum_{j=1}^{n} \chi_j P_{E_j} x$$

であり，そして

$$Tx = T'x = \sum_{j=1}^{\mu} \chi_j P_{E_j} x$$

となる．したがって，すべての有限の n について

$$s_n \approx \left\| \sum_{j=n+1}^{\mu} \chi_j P_{E_j} x \right\|$$

しかし，ピタゴラスの定理を用いると，

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{\mu} \chi_j P_{E_j} x \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\mu} |\chi_j|^2 \cdot \| P_{E_j} x \|^2 \leq |\chi_{n+1}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\mu} \| P_{E_j} x \|^2$$
$$= |\chi_{n+1}|^2 \cdot \| x \|^2.$$

これより，すべての有限の n について

$$s_n \leq |\nu_{n+1}| \cdot \| x \|$$

である．補題15によって $s_n \to 0$ を得る．□

5. 非コンパクト・エルミート作用素

我々はここで必ずしもコンパクトでない，ヒルベルト空間 H 上のエルミート作用素のスペクトル定理を (Bernstein [2] にしたがって) 証明する．

ここでも，このような作用素に射影子の族が対応していて，それらを用いてその作用素が表現できるかどうかが問題となる．しかしながら，一般の場合には和の形ではなくて積分の形に〝分解〟されるわけである．

ともかくその前に，どんな積分が用いられるか説明しておく必要があると思う．すなわち，$I=[a, b]$ で $a<b$, $a, b \in R$ を端点とする区間とする．g を I から R への写像とし $V(\lambda)$ を I 上で定義され，H 上の有界作用素を値にもつ函数とする．このとき，

$$T = \int_a^b g(\lambda) dV(\lambda)$$

と記して，すべての $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して

$$\left\| T-\sum_{j=0}^{n-1} g(r_j)(V(t_{j+1})-V(t_j))\right\| <\varepsilon$$

が次の条件の下では常に成立することをいう．すなわち条件

（1）　$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,

（2）　$t_{i+1}-t_i<\delta$,　　$i=0,1,\cdots,n-1$,

（3）　$t_i\leq r_i\leq t_{i+1}$,　　$i=0,1,\cdots,n-1$.

この説明の下で，次のようである．

スペクトル定理　T を H 上のエルミート作用素とし

$$a=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x) \qquad b=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$$

とする．このとき，H の射影子の族 $\{E(\lambda)|\lambda\in R\}$ が存在して

（1）　$\lambda\leq\mu$ ならば $E(\lambda)E(\mu)=E(\lambda)$

（2）　すべての $\lambda\in R$ について $T\cdot E(\lambda)=E(\lambda)\cdot T$

（3）　$\{\varkappa_n|n=1,2,3,\cdots\}$ をすべての n について $\varkappa_n>\lambda$ であり，$\varkappa_n\to\lambda$ となる列とすれば，すべての $x\in H$ について

$$E(\varkappa_n)x\to E(\lambda)x$$

（4）　$\lambda<a$ ならば $E(\lambda)=0, \lambda\geq b$ ならば $E(\lambda)=I$

（5）　すべての $h>0$ に対して

$$T=\int_{a-h}^{b}\lambda dE(\lambda).$$

以下では T は H 上のエルミート作用素とする．E, P および T' は前節で定義されたものとする．ここでも再び，E 上のエルミート作用素 T' の有限次元のスペクトル定理が適用できる．そして4節の補題1,2,3と5(しかし補題4は別)は変更なしに成立する．

区間 $[-\|T\|,\|T\|]$ を J で記すことにする．4節補題5によって $1\leq i\leq\nu$ なるすべての i について $\lambda_i\in{}^*J$ であり，さらに

補題 1.　　$a, b\in J.$

証明　$\|x\|=1$ とすると，

$$|(Tx,x)|\leq\|Tx\|\cdot\|x\|=\|Tx\|.$$

したがって

$$|b|=\left|\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)\right|\leq\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leq\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\|T\|.$$

さらに

$$a=\left|\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)\right|=\left|\sup_{\|x\|=1}(-Tx,x)\right|$$
$$\leq\sup_{\|x\|=1}|(-Tx,x)|$$
$$\leq\sup_{\|x\|=1}\|-Tx\|\cdot\|x\|$$
$$=\|T\|$$

となる. □

補題 2. $n\geq 0$ に対して $(T')^n=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^n P_i$ となる.

証明 n に関する帰納法で証明する. $n=0$ の場合は自明である. そこで n の場合を仮定して $n+1$ の場合を示す.

$$(T')^{n+1}=(T')^n T'=\left(\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^n P_i\right)\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i P_i=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_i^n\lambda_j P_i P_j$$

であるが, $i\neq j$ なら $P_iP_j=0$, $P_i{}^2=P_i$ であるから

$$\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i^{n+1}P_i$$

に等しい. □

多項式 $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$, $a_i\in {}^*R$ については, 補題2によって

$$p(T')=\sum_{i=1}^{\nu}p(\lambda_i)P_i$$

となる. これより, 次のように定義すればよい.

定義 函数 f は ${}^*J$ を含む領域で定義され ${}^*R$ の中の値をとる内函数とする. このとき, 作用素を

$$f(T')=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)P_i$$

によって定義する.

補題 3. f を上のように定義すると, $f(T')$ はエルミート作用素である.

証明 P_i がすべてエルミート的であることおよび $f(\lambda_i)\in {}^*R$ に注意すると,

$$(f(T')x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)P_ix,y\right)=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)(P_ix,y)$$
$$=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)(x,P_iy)=\left(x,\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)P_iy\right)$$
$$=(x,f(T')y)\quad\square$$

補題 4.（作用素の算法）

（1）　$(f+g)(T')=f(T')+g(T')$

（2）　$(f\cdot g)(T')=f(T')\cdot g(T')$

（3）　$(\lambda f)(T')=\lambda\cdot f(T')$

証明　(1), (3)は自明であるから，(2)を証明する．

$$f(T')\cdot g(T')=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)P_i\cdot\sum_{i=1}^{\nu}g(\lambda_i)P_i=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}f(\lambda_i)g(\lambda_j)P_iP_j$$

$$=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)g(\lambda_i)P_i=(f\cdot g)(T')\quad\square$$

函数として $f\cdot g$ と $g\cdot f$ は同じであるから，この補題によって

$$f(T')\cdot g(T')=g(T')\cdot f(T').$$

補題　f, g を $^*J$ 上で定義された内的函数で，すべての $\lambda\in{}^*J$ に対して $f(\lambda)\leq g(\lambda)$ であれば $f(T')\leq g(T')$ となる．

証明　次の計算に注意する，すなわち 2 節補題10 によって

$$(f(T')x, x)=\left(\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)P_ix, x\right)=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)(P_ix, x)$$

$$=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)(P_ix, P_ix)=\sum_{i=1}^{\nu}f(\lambda_i)\|P_ix\|^2$$

同様にして

$$(g(T')x, x)=\sum_{i=1}^{\nu}g(\lambda_i)\|P_ix\|^2$$

となるから，仮定を用いて所要の結果を得る．□

補題 6.　f, g, h を $^*J$ を含む領域で定義された $^*R$ の中の値を有する内函数で，すべての $\lambda\in{}^*J$ について $f(\lambda)\leq g(\lambda)\leq h(\lambda)$ とする．このとき，

（a）　$g(T')-f(T')\leq h(T')-f(T')$

（b）　すべての $x\in E$ について $\|g(T')x-f(T')x\|\leq\|h(T')x-f(T')x\|$ である．

証明（a）：すべての $\lambda\in{}^*J$ について $g(\lambda)-f(\lambda)\leq h(\lambda)-f(\lambda)$ であるから，前述の二つの補題より直ちに導かれる．

（c）　すべての $\lambda\in{}^*J$ について

$$0\leq g(\lambda)-f(\lambda)\leq h(\lambda)-f(\lambda)$$

となっているのであるから

$$0\leq(g(\lambda)-f(\lambda))^2\leq(h(\lambda)-f(\lambda))^2$$

となり，補題5によって，すべての $x\in E$ について

$$((g(T')-f(T'))^2x,x)\leq((h(T')-f(T'))^2x,x)$$

が成立する．ゆえに補題3によって

$$((g(T')-f(T'))x,(g(T')-f(T'))x)$$
$$\leq((h(T')-f(T'))x,(h(T')-f(T'))x)$$

であるが，これは

$$\|(g(T')-f(T'))x\|^2\leq\|(h(T')-f(T'))x\|^2$$

を意味している．□

定理　E 上の有界作用素 V は，近準点 $x\in E$ を近準点 Vx に写すとき，**近準的** (near standard) であるとよぶ．

補題 7.　V が内的で近準点な E 上の作用素であれば，$\|V\|$ は有限である．

証明　標準域での任意の有界線形作用素 W については ($\|W\|$ の定義より) ある x に対して $\|x\|=1$ であり

$$\|Wx\|\geq\|W\|-1$$

となる．したがって移行原理より $\|x\|=1$ で $\|Vx\|\geq\|V\|-1$ となるものが存在する．だから $\|V\|$ が無限大ならば $\|Vx\|$ も無限大である．そこで

$$y=x/\|Vx\|^{\frac{1}{2}}$$

を考えると，x は有限で $\|Vx\|$ は無限であるから $y\approx0$ となり y は近準点である．さて，$Vy=Vx/\|Vx\|^{\frac{1}{2}}$ であるから $\|Vy\|=\|Vx\|$ となり Vy は遠準点である．これは V が近準的作用素であることに反する．□

定義　V を E 上の近準的作用とするとき，$x\in H$ について $({}^\circ V)x={}^\circ(Vx)$ と定義する．

補題 8.　V を E 上の近準的作用素とすると，${}^\circ V$ は H 上の有界作用素で $\|{}^\circ V\|\leq{}^\circ\|V\|$ である．

証明　$x,y\in H,\lambda\in C$ とすれば

$$({}^\circ V)(x+y)={}^\circ(V(x+y))={}^\circ(Vx+Vy)$$
$$={}^\circ(Vx)+{}^\circ(Vy)=({}^\circ V)x+({}^\circ V)y,$$

同様にして

$$({}^\circ V)(\lambda x)={}^\circ(V(\lambda x))={}^\circ(\lambda Vx)$$
$$=\lambda{}^\circ(Vx)=\lambda({}^\circ V)x.$$

これより ${}^\circ V$ は H 上の線形作用素である．

次に内積の連続性 (4節補題13) を用いて

$$\|(^\circ V)x\| = \|^\circ(Vx)\| = {}^\circ\|Vx\|$$
$$\leq {}^\circ(\|V\|\cdot\|x\|) \leq \|^\circ V\|\cdot\|x\|.$$

この終りの部分では x が標準的であることと, 補題7によって $\|V\|$ が有限であることを用いている. これより証明ができたことになる. □

補題 9.　T' は近準的である.

証明　x を近準点とすると $x \approx u \in H$. したがって $T'x \approx T'u = Tu$ である. □

補題 10.　$n \geq 0$ に対して $(T')^n$ は近準的である.

証明　$n=0$ については明らかである. n の場合成立すると仮定して, x を近準点とする.

$$(T')^{n+1}x = T'((T')^n x)$$

であり, $(T')^n x$ が近準点(帰納法の仮定より)であるから, 補題9によって $(T')^{n+1}x$ も近準点である. □

補題 11.　$p(\lambda)$ を実係数の多項式とすれば, $p(T')$ は近準点である.

証明　$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ とし, x を近準点とすれば

$$p(T')x = a_0 x + a_1 T'x + \cdots + a_n(T')^n x$$

であるから, 前述の補題と近準点の線形結合は近準点であることを用いると所要の結果を得る. □

定理 5.1　f を J から R への連続函数とする. このとき $f(T')$ は近準的で $^\circ f(T')$ はエルミート的である.

証明　近準点 $x \in E$ に対して $f(T')$ が遠準点とする. 定理3-5.20によって実数 $r > 0$ が存在して

$$b \in H \quad \text{ならば} \quad \|f(T')x - b\| > r$$

となる. ワイアストラスの多項式近似定理によって, 多項式 $p(\lambda)$ が存在して, すべての $\lambda \in J$ に対して

$$|f(\lambda) - p(\lambda)| < \frac{r}{2\|x\|} \qquad (\ddagger)$$

が成立する. 移行原理によって, この不等式がすべての $\lambda \in {}^*J$ について成立する. (明らかに $\|x\| \neq 0$ となる. それは $x=0$ ならば $f(T')x=0$ となるが, 我々は $f(T')x$ は遠準点と仮定している)

ここでピタゴラスの定理, 性質 $(\ddagger)$ そして $1 \leq i \leq \nu$ ならば $\lambda_i \in {}^*J$ であるこ

とを用いると，

$$\|f(T')x-p(T')x\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{\nu}(f(\lambda_i)-p(\lambda_i))P_ix\right\|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{\nu}|f(\lambda_i)-p(\lambda_i)|^2\cdot\|P_ix\|^2$$

$$<\frac{r^2}{4\|x\|^2}\sum_{i=1}^{\nu}\|P_ix\|^2$$

ところで $x=P_1x+P_2x+\cdots+P_\nu x$ であるから，ピタゴラスの定理より

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{\nu}\|P_ix\|^2$$

となり，したがって

$$\|f(T')x-p(T')x\|<\frac{r}{2}$$

そして，複題11によって

$$\|f(T')x-{}^\circ(p(T'))x\|\leq\|f(T')x-p(T')x\|+\|p(T')x-{}^\circ(p(T'))x\|$$

$$<\frac{r}{2}+\text{無限小}<r$$

となり矛盾である．

次に ${}^\circ f(T')$ がエルミート的であることを示せば証明が終る．補題3によって

$$({}^\circ f(T')x,y)={}^\circ(f(T')x,y)$$

$$={}^\circ(x,f(T')y)$$

$$=(x,{}^\circ f(T')y).\quad\square$$

系 5.2 f を J から R への連続函数とする．すべての $\lambda\in J$ に対して $f(\lambda)\geq 0$ ならば，${}^\circ(f(T'))\geq 0$ である．

証明 移行原理によって，$\lambda\in{}^*J$ ならば $f(\lambda)\geq 0$ である．したがって補題5より $f(T')\geq 0$，すなわち $x\in E$ ならば $(f(T')x,x)\geq 0$．$H\subseteq E$ であるから，この不等式は $x\in H$ について成立する．標準部分をとることによって所要の結果を得る．$\square$

定理 5.3 $\{f_n|n\in N^+\}$ を J から R への連続函数の列で，$\lambda\in J$ ならば

(1) $f_n(\lambda)\geq 0$

(2) $f_{n+1}(\lambda)\leq f_n(\lambda)$

を満足するとき，すべての $x\in H$ に対して $\{{}^\circ f_n(T')x|n\in N^+\}$ は極限を有する．

証明　$F_n = {}^\circ(f_n(T'))$ とおく

主張 1.　すべての $n, m \in N$ について

$$F_n F_m = F_m F_n.$$

作用素の算法については

$$f_n(T') f_m(T') = f_m(T') f_n(T')$$

であったから，標準部分をとればよい．

主張 2.　$m \geq n$ および $x \in J$ については

$$f_n(\lambda) f_n(\lambda) \geq f_n(\lambda) f_m(\lambda) \geq f_m(\lambda) f_m(\lambda).$$

前半は $f_n(\lambda) \geq f_m(\lambda) \geq 0$ および $f_n(\lambda) \geq 0$ より得られる．後半も同様である．

系5.2および主張2によって $m \geq n$ ならば

$$F_n{}^2 \geq F_n F_m \geq F_m{}^2 \geq 0 \qquad (1)$$

したがって $m \geq n$ かつ $x \in H$ ならば

$$(F_n{}^2 x, x) \geq (F_m{}^2 x, x) \geq 0.$$

それゆえ，

$$\{(F_n{}^2 x, x) \mid n \in N^+\}$$

は実数の単調減少列であり，したがって収束する．すなわちこれはコーシー列である．(1)によって $m \geq n$ かつ $x \in H$ ならば

$$(F_n{}^2 x, x) \geq (F_n F_m x, x) \geq (F_m{}^2 x, x) \geq 0 \qquad (2)$$

である．また $\{(F_n{}^2 x, x) \mid n \in N^+\}$ はコーシー列であったから，$n, m \in {}^*N - N$ については

$$(F_n{}^2 x, x) \approx (F_m{}^2 x, x)$$

であり，(2)によって

$$(F_n{}^2 x, x) \approx (F_n F_m x, x) \approx (F_m{}^2 x, x). \qquad (3)$$

F_n がエルミート的であることと，主張1によって

$$\begin{aligned}\|F_n x - F_m x\|^2 &= (F_n x, F_n x) - (F_n x, F_m x) - (F_m x, F_n x) + (F_m x, F_m x) \\ &= (F_n{}^2 x, x) - 2(F_n F_m x, x) + (F_m{}^2 x, x).\end{aligned}$$

したがって，(3)を用いると $m, n \in {}^*N - N$ について $F_n x \approx F_m x$ を得る．これより $\{F_n x\}$ はコーシー列となり極限を有する．□

さて，$\eta \in {}^*R$ に対して

$$S(\eta) = \sum_{\lambda_i < \eta} P_i$$

とおくと，系2.4と移行原理によって $S(\eta)$ は E 上の射影子である．$S(\eta)$ と作用素の算法を通じて取扱うために，ヘビサイド† の単位函数を導入する：

$$h_\eta(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda<\eta,\\ 0, & \lambda\geq\eta.\end{cases}$$

補題 12.
$$S(\eta)=h_\eta(T').$$

証明 $h_\eta(T')=\sum_{i=1}^{\nu}h_\eta(\lambda_i)P_i=\sum_{\lambda_i<\eta}P_i=S(\eta)$ □

補題 13. $\eta_1<\eta_2<\eta_3$ および $x\in E$ の下で

$$\|S(\eta_2)x-S(\eta_1)x\|\leq\|S(\eta_3)x-S(\eta_1)x\|.$$

証明 与えられた不等式によって，すべての λ について

$$h_{\eta_1}(\lambda)\leq h_{\eta_2}(\lambda)\leq h_{\eta_3}(\lambda)$$

これより補題6, 12 によって所要の結果を得る．□

定理 5.4 $x\in H,\mu\in R$ とする．このとき $\eta>0,\eta\approx 0,\eta\in{}^*R$ で次の条件を満足するものが存在する：

（1） $S(\mu+\eta)x$ は近準点

（2） $\eta'>\eta,\eta'\approx 0$ ならば $S(\mu+\eta)x\approx S(\mu+\eta')x$

(一般に η は μ と x に関係することに注意)

証明 函数 $g_n(\lambda)$ を次のように定義する．

$$g_n(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\leq\mu+\dfrac{1}{n},\\[2ex] n(n-1)\left(\mu+\dfrac{1}{n-1}-\lambda\right), & \mu+\dfrac{1}{n}\leq\lambda<\mu+\dfrac{1}{n-1},\\[2ex] 0, & \mu+\dfrac{1}{n-1}\leq\lambda.\end{cases}$$

すなわち $g_n(\lambda)$ は $\lambda\leq\mu+\dfrac{1}{n}$ については1，$\mu+\dfrac{1}{n-1}\leq\lambda$ については0，そして区間

$$\left[\mu+\frac{1}{n},\mu+\frac{1}{n-1}\right]$$

では1から0に直線的に減少する函数である．

---

†[訳注] O. Heaviside (1850-1925) 微分•積分の演算を記号化し代数的手法を微分方程式等の解法に応用し，特に19世紀末に電気工学に応用して普及しはじめたという．これらの概念は極数の拡張が必要であることを示しており，超函数やより一般の函数の導入の動機づけとなった．

このようにすると各 $g_n(\lambda)$ は R 上連続であり（読者は図を描いてみてほしい），すべての $\lambda\in R$ について $g_{n+1}(\lambda)\leq g_n(\lambda)$ である．したがって前の結果より

（1）　$n\in N^+$ について $g_n(T')x$ は近準点である

（2）　$y_x={}^\circ(g_n(T')x)$ とおくと $\{y_n|n\in N^+\}$ なる列は，ある $y\in H$ に収束する．

これらより，$n\in{}^*N-N$ については $y_n\approx y$ である．また $\{g_n(T')x\}$ は内的であり，すべての有限の n について $y_n\approx g_n(T')x$ であるから，無限小延長定理によって，ある $\varkappa\in{}^*N-N$ について

$$n\leq\varkappa+1\quad ならば\quad y_n\approx g_n(T')x$$

となる．すなわち，無限な n で $n\leq\varkappa+1$ となるものについては $y\approx g_n(T')x$ である．これらのことより結論として

（a）　すべての $n\leq\varkappa+1$ について $g_n(T')x$ は近準点

（b）　無限の $n, m\leq\varkappa+1$ について $g_n(T')x\approx g_m(T')x$

容易にわかる（図を描いてみると）ように，すべての $n\in N^+, \lambda\in R$ について

$$g_{n+1}(\lambda)\leq h_{\mu+\frac{1}{n}}(\lambda)\leq g_n(\lambda).$$

さて，$\eta=1/\varkappa$ とおくと $\eta\approx0$ である．移行原理によると，すべての $\lambda\in{}^*R$ について

$$g_{\varkappa+1}(\lambda)\leq h_{\mu+\eta}(\lambda)\leq g_\varkappa(\lambda).$$

補題6によって

$$\|h_{\mu+\eta}(T')x-g_\varkappa(T')x\|\leq\|g_\varkappa(T')x-g_{\varkappa+1}(T')x\|.$$

性質(b)によって右辺は無限小であり，したがって左辺も無限小である．これより

$$S(\mu+\eta)x=h_{\mu+\eta}(T')x\approx g_\varkappa(T')x$$

となる．よって性質(a)より $S(\mu+\eta)$ は近準的である．

証明を完成するに当って，$\eta'>\eta, \eta'\approx0$ とする．$1/\eta'$ は無限大であるから，（移行原理によって）$m\in{}^*N-N$ が存在して $m-1<\dfrac{1}{\eta'}\leq m$ となり，したがって $\dfrac{1}{m}\leq\eta'<\dfrac{1}{m-1}$ となる．また $\eta'>\eta, \dfrac{1}{\eta'}<\dfrac{1}{\eta}=\varkappa$ であるから $m-1<\varkappa$，よって $m\leq\varkappa$ となる．

さて，（最後の図を！）$n\in N$（$n>2$）について $\dfrac{1}{n}\leq t<\dfrac{1}{n-1}$ ならば

$$g_{n+1}(\lambda)\leq h_{\mu+t}(\lambda)\leq g_{n-1}(\lambda).$$

移行原理と補題6を用いると

$$\|h_{\mu+\eta}(T')x-g_{m+1}(T')x\|\leq\|g_{m-1}(T')x-g_{m+1}(T')x\|.$$

$m-1<m+1\leq\varkappa+1$ であるから，性質(b)によって，右辺にしたがって左辺は無限小である．したがって(b)と(4)を用いて

$$S(\mu+\eta')x=h_{\mu+\eta'}(T')x\approx g_{m+1}(T')x\approx g_{\kappa}(T')x\approx S(\mu+\eta)x$$

となり，証明が終った．□

この定理より，どんな $\lambda\in R$ と $x\in H$ が与えられても無限小の η_{κ}^{λ} が存在して，

（1） $S(\lambda+\eta_{\kappa}^{\lambda})x$ は近準点

（2） $\eta>\eta_{\kappa}^{\lambda}, \eta\approx 0$ ならば $S(\lambda+\eta)x\approx S(\lambda+\eta_{\kappa}^{\lambda})x$

そして，誤解のおそれがないときは，添字 λ を省略することにする．

さて，スペクトル定理のところにでてきた，H の射影子の集り（もう，おわかりのことと思うが）$\{E(\lambda)|\lambda\in R\}$ を導入する用意ができている．すなわち

$$E(\lambda)={}^{\circ}(S(\lambda+\eta_{\kappa}^{\lambda})x)$$

とおくのである．

補題 14. $E(\lambda)$ は H 上の有界な線形作用素である．

証明 $x, y\in H$ とする．$\eta\approx 0$ については

$$E(\lambda)x\approx S(\lambda+\eta)x, \qquad \eta>\eta_x,$$
$$E(\lambda)y\approx S(\lambda+\eta)y, \qquad \eta>\eta_y,$$
$$E(\lambda)(x+y)\approx S(\lambda+\eta)(x+y), \qquad \eta>\eta_{x+y}.$$

これより $\eta>\eta_x, \eta_y, \eta_{x+y}$ で $\eta\approx 0$ とすると，この3つの関係が同時に成立する．$S(\lambda+\eta)$ は線形であったから，このような η を用いると

$$E(\lambda)(x+y)\approx E(\lambda)x+E(\lambda)y$$

を得る．この両辺は標準元であったから，$\approx$ は $=$ で置換えられる．

同様にして，$x\in H, \alpha\in C$ とすると

$$E(\lambda)(\alpha x)\approx S(\lambda+\eta)(\alpha x)$$
$$=\alpha S(\lambda+\eta)x, \qquad \eta>\eta_{\alpha x}$$
$$\alpha E(\lambda)x\approx\alpha S(\lambda+\eta)x, \qquad \eta>\eta_x$$

これより $\eta>\eta_{\alpha x}, \eta_x$ とすると，

$$E(\lambda)(\alpha x)=\alpha E(\lambda)x.$$

終りに，すべての $\mu\in{}^*R$ について $\|S(\mu)\|=1$ であったから，

$$\|S(\lambda+\eta_x)x\| \leq \|x\|.$$

これより，標準部分をとって

$$\|E(\lambda)x\| \leq \|x\|$$

を得る．□

補題 15.　$E^2(\lambda)=E(\lambda)$

証明　$y=E(\lambda)x$ とする．$\eta>\eta_x, \eta_y$，$\eta\approx 0$ とすると，

$$\begin{aligned} E^2(\lambda)x &= E(\lambda)y \approx S(\lambda+\eta)y \\ &= S(\lambda+\eta)E(\lambda)x \approx S(\lambda+\eta)S(\lambda+\eta)x \\ &= S(\lambda+\eta)x \approx E(\lambda)x \end{aligned}$$

ここで $S(\lambda+\eta)$ が射影子であることより $S^2(\lambda+\eta)=S(\lambda+\eta)$ となることを用いた．□

定理 5.5　すべての $\lambda\in R$ について $E(\lambda)$ は H の射影子である．

証明　定理2.5および今までの補題によって，$E(\lambda)$ がエルミート的であることを示せばよい．しかしこれは内積の連続性を用いれば容易に示すことができる．すなわち $x, y\in H$，$\eta>\eta_x, \eta_y$，$\eta\approx 0$ とすると

$$\begin{aligned} (E(\lambda)x, y) &\approx (S(\lambda+\eta)x, y) = (x, S(\lambda+\eta)y) \\ &\approx (x, E(\lambda)y). \quad \square \end{aligned}$$

補題 16.　$\eta_1<\eta_2$ とすると

$$S(\eta_1)S(\eta_2)=S(\eta_1).$$

証明　$\eta_1, \eta_2\in R$，$\eta_1<\eta_2$ とすると明らかに，すべての $\lambda\in R$ について

$$h_{\eta_1}(\lambda)\cdot h_{\eta_2}(\lambda)=h_{\eta_1}(\lambda)$$

であるから，移行原理と作用素の算法によればよい．□

補題 17.　$\mu\leq\varkappa$ とすると

$$E(\mu)\cdot E(\varkappa)=E(\varkappa).$$

証明　$\mu=\varkappa$ の場合は $E(\mu)$ が巾等であることより得られる．

$\mu<\varkappa$ の場合は，$\eta>\eta_x^\mu, \eta_x^\varkappa, \eta_{E(\varkappa)x}^\mu$，$\eta\approx 0$ とすると

（1）　$E(\mu)x\approx S(\mu+\eta)x$

（2）　$E(\varkappa)x\approx S(\varkappa+\eta)x.$

したがって，補題16によって

$$\begin{aligned} E(\mu)E(\varkappa)x &\approx S(\mu+\eta)E(\varkappa)x \\ &\approx S(\mu+\eta)S(\varkappa+\eta)x \\ &= S(\mu+\eta)x \approx E(\mu)x \end{aligned}$$

補題 18. $$T\cdot E(\lambda)=E(\lambda)\cdot T.$$

証明 まず，作用素の算法によって，すべての $\zeta\in{}^*R$ について

$$S(\zeta)\cdot T=h_\zeta(T')\cdot T'=T'\cdot h_\zeta(T')=T'\cdot S(\zeta).$$

さて，$x\in H$，$\eta>\eta_x,\eta_{Tx}$，$\eta\approx 0$ とすると

$$\begin{aligned}(T\cdot E(\lambda))x&=T'(E(\lambda)x)\approx T'(S(\lambda+\eta)x)\\&=S(\lambda+\eta)T'x\\&=S(\lambda+\eta)Tx\\&\approx E(\lambda)(Tx)\\&=(E(\lambda)T)x.\end{aligned}\qquad\square$$

補題 19. χ_n を単調減少な列で $\chi_n\to\lambda$ とすると，すべての $x\in H$ に対して，

$$E(\chi_n)x\to E(\lambda)x.$$

証明 補題18と定理2.6によって $E(\chi_{n+1})\leq E(\chi_n)$．したがって，2節補題14によって，すべての $x\in H$ に対して $\{E(\chi_n)x\,|\,x\in N^+\}$ は収束する．よって，すべての $x\in H$ に対して，$E(\chi_\nu)x\approx E(\lambda)x$ となる無限整数 ν が存在することを示せば十分である．

これを示すために，η_n：$n=1,2,3,\cdots$ および η を

$$E(\chi_n)x\approx S(\chi+\eta_x)x,\qquad E(\lambda)x\approx S(\lambda+\eta)x$$

となるように選ぶ．ここで2番目の関係は η より大きな無限小についても成立する．このようにすると $\lambda<\chi_n$ であるから

$$\lambda+\eta<\chi_n<\chi_n+\eta_n<\chi_n+\frac{1}{n}$$

である． 各 $n\in N^+$ について，

$$\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-E(\lambda)x\right\|\leq\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-S(\lambda+\eta)x\right\|+\|S(\lambda+\eta)x-E(\lambda)x\|$$

これより

$$\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-E(\lambda)x\right\|=\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-S(\lambda+\eta)x\right\|+\text{無限小}.$$

同様にして

$$\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-E(\chi_n)x\right\|=\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-S(\chi_n+\eta_n)x\right\|+\text{無限小}.$$

さて，補題13によって

$$\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-S(\lambda+\eta)x\right\|-\left\|S\left(\chi_n+\frac{1}{n}\right)x-S(\chi_n+\eta_n)x\right\|\geq 0.$$

これより

$$c_n=\left\| S\left(x_n+\frac{1}{n}\right)x-E(\lambda)x\right\|-\left\| S\left(x_n+\frac{1}{n}\right)x-E(x_n)x\right\| \qquad (5)$$

なる量は，すべての $n\in N^+$ について，≥ 0 であるか無限小となる．

c_n を(5)によって，すべての $n\in {}^*N^+$ に対して定義し，$d_n=|c_n|-c_n$ とおく．このようにすると，$c_n\geq 0$ ならば $d_n=0$ であり，$c_n\approx 0$ ならば $d_n\approx 0$ である．これより，すべての $n\in N^+$ について $d_n\approx 0$ となるので，無限小延長定理によってある $\mu\in {}^*N-N$ に対して $n\leq\mu$ ならば $d_n\approx 0$ である．また μ と $1/\eta$ は無限大の超実数であるから $\nu<\eta$ でかつ $\nu<1/\eta$ となる無限整数が存在する．これより $1/\eta<\eta$ であり，したがって

$$\eta'>\frac{1}{\nu} \text{ ならば } E(\lambda)x\approx S(\lambda+\eta')x$$

同様にして $x_n\to\lambda$ であり $x_n>\lambda$ であるから

$$(x_\nu-\lambda)\begin{cases}\approx 0\\ >0\end{cases}$$

となり，したがって

$$\left(x_\nu-\lambda+\frac{1}{\nu}\right)\begin{cases}\approx 0\\ >\dfrac{1}{\nu}\end{cases}$$

となる．すなわち

$$E(\lambda)x\approx S\left(\lambda+\left(x_\nu-\lambda+\frac{1}{\nu}\right)\right)x=S\left(x_\nu+\frac{1}{\nu}\right)x.$$

したがって(5)により

$$\left\| S\left(x_\nu+\frac{1}{\nu}\right)x-E(x_\nu)x\right\|=\delta-c_\nu,$$

ここに $\delta\approx 0$, $\delta-c_\nu\geq 0$ であるから，c_ν は無限小である．(もし $c_\nu<0$, $c_\nu\not\approx 0$ ならば $d_\nu=2c_\nu\not\approx 0$) これより $\delta-c_\nu\approx 0$. よって

$$S\left(x_\nu+\frac{1}{\nu}\right)x\approx E(x_\nu)x$$

となる．これは

$$E(x_\nu)x\approx E(\lambda)x$$

を意味している．□

補題 20. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とすると

$$\|E(\lambda_2)x - E(\lambda_1)x\| \leq \|E(\lambda_3)x - E(\lambda_1)x\|.$$

証明
$$E(\lambda_i)x \approx S(\lambda_i + \eta)x, \qquad i=1, 2, 3$$
となる $\eta > 0, \eta \approx 0$ をとると，補題13によって

$$\|S(\lambda_2+\eta)x - S(\lambda_1+\eta)x\| \leq \|S(\lambda_3+\eta)x - S(\lambda_1+\eta)x\|$$

である．ここで標準部分をとればよい．□

補題 21. すべての n について $\varkappa_n > \lambda$ となる列について $\varkappa_n \to \lambda$ とする．このとき，すべての $x \in H$ について $E(\varkappa_n)x \to E(\lambda)x$ である．

証明 $\{\varkappa_n | n \in N^+\}$ の狭義単調減少部分列 $\{\varkappa_{n_i} | i \in N^+\}$ をとる．(例えば，$\varkappa_{n_1}$ $\cdots, \varkappa_{n_k}$ がすでに定義されたとするとき，n_{k+1} を n_k より大きな n で $\varkappa_n < \varkappa_{n_k}$ が成立する最小の n とする．このような n_{k+1} が存在することは仮定によって保証されている) 補題19によって $E(\varkappa_{n_j})x \to E(\lambda)x$ である．

さて $\varepsilon > 0$ が任意に与えられると，ある i について

$$\|E(\varkappa_{n_i})x - E(\lambda)x\| < \varepsilon$$

となる．$n > n_0$ ならば $\varkappa_n < \varkappa_{n_i}$ となるようにとると，前補題によって $n > n_0$ ならば

$$\|E(\varkappa_n)x - E(\lambda)x\| \leq \|E(\varkappa_{n_i})x - E(\lambda)x\| < \varepsilon.$$

すなわち $E(\varkappa_n)x \to E(\lambda)x$ が成立する．□

この節の最初のところで述べた，スペクトル定理の(3)の部分が示されたところである．(1)は補題17，そして(2)は補題18である．(4)および(5)については，定理の中で定義された数 a, b を含んでいる．(4)の証明は次の補題に含まれる．

補題 22. $\lambda > b$ であるが $E(\lambda) \neq I$ である．

証明 $\lambda > b$ であるが $E(\lambda) \neq I$ と仮定する．$E(\lambda)$ は射影子であるから，H の閉部分空間 F で $E(\lambda) = F$ となるものが存在する．すなわち (系2.3参照)

$$I - E(\lambda) = P_{F^\perp} \neq 0$$

となる．したがって $F^\perp \neq \{0\}$ となる．そこで $x \in F^\perp, \|x\| = 1$ となる x をとる．$x \in F^\perp$ であったから

$$(I - E(\lambda))x = x \text{ であり } E(\lambda)x = 0.$$

また，ある $\eta \approx 0$ について

$$E(\lambda)x \approx S(\lambda + \eta)x$$

である．そこで

$$W = \{i | \lambda + \eta \leq \lambda_i\}$$

とおくと,

$$x=x-E(\lambda)x\approx\sum_{i=1}^{\nu}P_ix-S(\lambda+\eta)x$$
$$=\sum_{i=1}^{\nu}P_ix-\sum_{\lambda_i<\lambda+\eta}P_ix=\sum_{i\in W}P_ix.$$

次に T' のスペクトル分解および x が標準的であることを用いると

$$Tx=T'x\approx T'\Bigl(\sum_{i\in W}P_ix\Bigr)$$
$$=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_iP_i\Bigl(\sum_{i\in W}P_ix\Bigr)=\sum_{i\in W}\lambda_iP_ix.$$

W の定義を思い出し，内積の連続性を用いると

$$(Tx,x)\approx\Bigl(\sum_{i\in W}\lambda_iP_ix,\ \sum_{i\in W}P_ix\Bigr)=\sum_{i\in W}\lambda_i(P_ix,P_ix)$$
$$=\sum_{i\in W}\lambda_i\|P_ix\|^2\geq(\lambda+\eta)\sum_{i\in W}\|P_ix\|$$
$$=(\lambda+\eta)\Bigl\|\sum_{i\in W}P_ix\Bigr\|\approx(\lambda+\eta)\|x\|$$
$$=(\lambda+\eta)\approx\lambda$$

を得る．そこで標準部分をとると，$(Tx,x)\geq\lambda>b$ となるが，これは

$$b=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$$

と矛盾する．□

補題 23.　$E(b)=I$

証明　$x_n>b$, $x_n\to b$ (例えば $x_n=b(1+1/n)$) とすれば，補題22 によって，すべての n および $x\in H$ について $E(x_n)x=x$ である．したがって補題21 (または補題19 によっても)，すべての $x\in H$ について $E(b)x=x$ である．□

補題 24.　$\lambda<a$ ならば $E(\lambda)=0$ である．

証明　$\lambda<a$ に対して $E(\lambda)\neq 0$ と仮定する．このとき閉部分空間 $F\neq\{0\}$ が存在して $E(\lambda)=P_F$ となる．そこで $x\in F$ を $\|x\|=1$ となるようにとる．

$$E(\lambda)\approx S(\lambda+\eta),\quad \eta\approx 0$$

となる η を考え,

$$W=\{i\,|\,\lambda_i<\lambda+\eta\}$$

とおく．$x\in F$ であるから

$$x=E(\lambda)x\approx S(\lambda+\eta)x$$
$$=\sum_{\lambda_i<\lambda+\eta}P_ix=\sum_{i\in W}P_ix.$$

また，x は標準的であるから

$$Tx = T'x \approx T'\left(\sum_{i \in W} P_i x\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i P_i \left(\sum_{i \in W} P_i x\right)$$
$$= \sum_{i \in W} \lambda_i P_i x.$$

これより

$$(Tx, x) = \left(\sum_{i \in W} \lambda_i P_i x, \sum_{i \in W} P_i x\right) = \sum_{i \in W} \lambda_i \| P_i x \|^2$$
$$< (\lambda + \eta) \sum_{i \in W} \| P_i x \|^2 = (\lambda + \eta) \left\| \sum_{i \in W} P_i x \right\|^2$$
$$\approx (\lambda + \eta) \| x \|^2 = (\lambda + \eta) \approx \lambda.$$

したがって，標準部分をとると

$$(Tx, x) \leq \lambda < a$$

である．$\| x \| = 1$ であったから

$$a = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

に反する．□

最後に，述べられた三つの補題によって，スペクトル定理の(4)が証明された．したがって残っているのは次のことである．

(5)の証明　$\varepsilon > 0$ を実数とする．区間 $[a-h, b]$ を

$$a - h = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_k = b,$$

$u_{i+1} - u_i < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるように分割し，$u_i \leq r_i \leq u_{i+1}$ なる点 r_i をとる．これに対するリーマン•スティルチェス† 積分は

$$S = \sum_{i=1}^{k-1} r_i (E(u_{i+1}) - E(u_i)).$$

証明を完成されるためには $\| S - T \| < \varepsilon$ を証明すれば十分である．

さて $S - T$ を計算するに当っては T' のスペクトル分解を $\{\lambda_i | 1 \leq i < \nu\}$ を用いて表現することが必要である．もちろん，これらはすべて区間 $^*J = {}^*[-\| T \|, \| T \|]$ の中に表われている．補題1により $[a-h, b]$ は $[-\| T \|, \| T \|]$ に含まれているので，$\{u_i | 0 \leq i \leq k\}$ なる分割に，必要ならば $a-h$ より小さい

---

†[訳注]　T. Stieltjes (1856-1894)　積分の概念を一般化し，色々の変換の具体的性質を研究した．

点とか b より大きな点を加えて新しい分割

$$-\|T\|-h=t_0<t_1<\cdots<t_n=\|T\|$$

で $\|t_{j+1}-t_j\|<\varepsilon/2$ $(j=0,1,\cdots,n-1)$ となるようにする．$t_j\le s_j\le t_{j+1}$ なる s_j についても，$t_j=u_i$, $t_{j+1}=u_{i+1}$ となっていれば，$s_j=r_j$ になるようにとることにすれば

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}s_j(E(t_{j+1})-E(t_j))=&\sum_{j=0}^{r}s_j(E(t_{j+1})-E(t_j))\\&+\sum_{i=0}^{k-1}r_i(E(u_{i+1})-E(u_i))\\&+\sum_{j=q}^{n-1}s_j(E(t_{j+1})-E(t_j))\end{aligned}$$

となる．ここに $t_{p+1}=a-h$ で $t_q=b$ である．しかし補題24によれば

$$\sum_{j=0}^{p}s_j(E(j_{j+1})-E(t_j))=\sum_{j=0}^{p}s_j(0-0)=0.$$

であり，補題22, 23によれば

$$\sum_{j=q}^{n-1}s_j(E(j_{j+1})-E(t_j))=\sum_{j=q}^{n-1}s_j(I-I)=0.$$

したがって

$$S=\sum_{j=0}^{n-1}s_j(E(t_{j+1})-E(t_j)).$$

さて，$x\in H$ で $\|x\|=1$ とする．そして $\eta\approx 0$ を

$$E(t_j)x=S(t_j+\eta)x,\quad j=0,1,\cdots,n-1$$

にとる．そして

$$W_j=\{i\,|\,t_j+\eta<\lambda_i\le t_{j+1}+\eta\}$$

とおくと，

$$\bigcup_{j=0}^{n-1}W_j=\{i\in {}^*N\,|\,1\le i\le\nu\}$$

であり

$$\begin{aligned}(E(t_{j+1})-E(t_j))x&\approx S(t_{j+1}+\eta)x-S(t_j+\eta)x\\&=\sum_{i\in W_j}P_ix,\end{aligned}$$

となる．さらに

$$x=\sum_{i=1}^{\nu}P_ix=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i\in W_j}P_ix$$

$$Tx=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_iP_ix=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i\in W_j}\lambda_iP_ix.$$

さて，

$$\begin{aligned}\|Sx-Tx\| &= \left\|\sum_{j=0}^{n-1} s_j(E(t_{j+1})-E(t_j))x-Tx\right\| \\ &\approx \left\|\sum_{j=0}^{n-1} s_j \sum_{i\in W_j} P_i x-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i\in W_j}\lambda_i P_i x\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=0}^{n-1}\left(s_j\sum_{i\in W_j} P_i x-\sum_{i\in W_j}\lambda_i P_i x\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i\in W_j}(s_j-\lambda_i)P_i x\right\|\end{aligned}$$

そこで $\mu_i=s_j-\lambda_i$，ここに $i\in W_j$ とすると，$t_j\leq s_j\leq t_{j+1}$ で $t_j\leq\lambda_i\leq t_j+\eta$，であるから $|\mu_i|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\eta$ である．すなわち

$$\begin{aligned}\|Sx-Tx\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i P_i x\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\nu}|\mu_i|^2\cdot\|P_i x\|^2 \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}+\eta\right)^2\sum_{i=1}^{\nu}\|P_i x\|^2 \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}+\eta\right)^2\|x\|^2 \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}+\eta\right)^2\end{aligned}$$

したがって

$$\|Sx-Tx\|<\frac{\varepsilon}{2}+\eta<\frac{3}{4}\varepsilon.$$

最後に x は H の任意の点で $\|x\|=1$ であったから

$$\|S-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Sx-Tx\|\leq\frac{3}{4}\varepsilon<\varepsilon$$

となり証明が終った．□

超準解析とその背景

超準解析，non-standard analysis について，その歴史的背景や数学の中での位置等について少し感じたことを記してみようと思う．

まず，non-standard (超準的) なる語であるが，これは standard (標準的) という語に対して用いられているのであるが，この standard という意味について説明するには少し歴史をさかのぼらねばならないであろう．

さて G. Cantor が，G. Riemann の残した三角級数の収束の問題に関係して，最初には実数の "集合" についてであったが，"素朴" な集合の概念に着目して，集合論を創始したのは 1870 年代のことであった．

そして，この集合の概念は，その記述の自然さと自由さから着実に数学の自然な言語となっていったが，一方において集合論の成立の当初から，Cantor の師でもあった L. Kronecker から痛切な批判を受けていた．

Kronecker は "無限" について，実際に "構成可能" なものだけを考えるべきであると主張し，

"自然数は神が創りたもうた，残りのものはすべての人の所産である"

との言を残した．これに対して Cantor は

"数学の本質はその自由性にある"

との言を残している．前者の Kronecker の言は，伝統的数学の線の上，すなわち C. F. Gauss そして Riemann 等によっても同様の主旨のことが述べられている，その流れにそっているわけである．これに対して Cantor の立場は，実数論等でも有名な J. Dedekind や K. Weierstrass によって支持され，また発展させれられた．

そして集合論が数学に深く関係して用いられるようになるにしたがって "素朴" な集合論の中に本質的な困難点があることが明確となってきた．すなわち色々の "paradox" が相次いで発見されるに至ったわけである．例えば Cantor による

"集合の全体の集合の基数"

による paradox (1895), Burali-Forti (1897), やはり彼によるという

"順序数の全体の順序数"

による paradox (1899), そして簡潔で決定的な

"自分自身を含まない集合の全体"

すなわち $\{x \mid x \notin x\}$ による B. Russell の paradox (1902-3). そしてさらに, 定義可能な自然数の函数は, その "定義式" が可算であるから, それらを $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ として,

$$g(n)=f_n(n)+1$$

で "定義" される函数を考えることによる J. Richard の paradox (1905) や

"19 文字以下で定義できない最小の自然数"

による paradox なども知られている.

ここで, Gauss の言を思いおこしておこう. (Werke III, p. 216, 1831).

"私は無限のものを何か完結したものとして用いることには強く反対する. このようなことは数学では許されてはならないことである"

ともあれ, このような状態がなぜに生じてきたかを分析して

"数学の健全な部分を失うことなしに矛盾を回避する"

ことの可能性を求めて色々のことがなされることになったわけである.

Russell はこのような矛盾は, 異なる type (型) の概念を同一視することから生ずるとして, 型の理論 (type theory) を作り上げたのであるが, 数学の言語としての自然さを保つために, 異なる type の概念を結びつける還元の公理 (axiom of reducibility) を導入せざるを得なくなった. しかし, これは後に公理的集合論での基本的概念として受継がれることになるのである.

D. Hilbert は有限の立場を唱え, 形式主義の立場をとった. これは数学の体系を何個かの公理と推論規則の形式的体系と考えて, 特にその体系の "無矛盾性" (consistency) に本質的意味があると考えたわけであり, それは

"正しさ" と "証明可能性"

の概念がそれぞれ何を意味しているかを問うことになったわけで, 後に証明論 (proof theory) と模型論 (model theory) という二つの互いに双対をなす分野へと発展してゆくのである. これらの理論は一つの車の両輪のように, 一つの概念の二つの視点であることが, K. Gödel 等によって認識されることになった.

そして L. Brouwer は背中律の無制限な使用は許されるべきでないことを,

論理記号をどのように解釈すべきであるかを問うて，主張し直観主義の立場をとった．彼は論理記号，否定$\neg$，存在$\exists$，"ならば" $\to$ 等の意味を，例えば次のように考えた．A の否定$\neg A$ の意味は

"A の仮定の下で矛盾に至る証明がある"

ということ，$\exists xA(x)$ は

"$A(x)$ となる x の構成法がある"

ということ，そして A ならば B，すなわち $A \to B$ は

"A の証明が与えられると，それを用いて B の証明の構成法がある"

ことと解釈するわけで，このような立場の違いから Hilbert と Brouwer の間には解釈とか形式に関係した激しいやりとりがあったという．

このような解釈，有限性とか構成可能性の問題は，証明可能性とか計算可能性と関係して algorithm の理論へと発展し，J. Herbrandt, K. Gödel そして A. Turing 等によって研究が進められ，一つの安定した概念

"計算可能とは一般帰納的なこと"

であるとする，A. Church の提言 (1936) がなされている．これは証明可能な性質のものではなくて，一つの提案であり，また計算可能性をこのように解釈すべきであるかという一つの問題提起とも考えられる．

さて，標準的 (standard) と超準的 (non-standard) の説明から少し逸れているという印象を受けるという人々も多いであろうが今しばらく，このような流れにそってみよう．

さて，形式主義や直観主義に関係し，そして少し後には proof theory と model theory の間の自然な対応関係を読みとったのは Gödel で，それを二つの基本的な定理にまとめた．すなわち

"完全性定理と不完全性定理"

であって，これらは completeness theorem と incompleteness theorem がその本来の名であり，それぞれ 1930, 1931 年に相継いで発表されている．これらは

"存在と定義可能性"

をどのように考えるべきかについて深い示唆を与えている．

ここで主要な役割を演ずる概念は

"induction と compactness"

である．帰納法 (induction) は，項，論理式とか証明の構成による帰納法である．compactness は model における解釈の全体のなす位相空間の compactness で

ある．これらの概念が必ずしも双対(duality)をなすことは自明には見えないであろうが，それについてもすこし記しておくことにしよう．

さて，完全性定理によって無矛盾な体系はmodelを有することが理解されるようになったわけであるが，一般にこのようなmodelは同型というのを無視しても一意的ではないのである．これはTh. Skolemによって示されたもので，

〝無限基数 $\aleph_\alpha$ を有する公理系が無矛盾，すなわちmodelを有すれば，それは $\aleph_\alpha$ に等しいか，それより大きな任意の基数のmodelを有する．〞

これをSkolemの定理とよんでいる．

例えば，自然数や集合論のように可算個の公理より成る体系では

〝無矛盾なら可算modelをもつ〞

ことがわかる．例えば集合論の場合を考えれば〝無矛盾〞ならば〝可算〞modelがあるわけで，この中での〝実数の全体〞はCantorの定理によって〝非可算〞であるが，可算modelの一部分として〝可算〞となり矛盾しているように見える．これをSkolemのparadoxとよぶのであるが，もちろん〝可算〞という意味が異なる意味を有しているわけである．そして特に重要な点は〝無矛盾〞であろうかという部分であろう．これに対するのが前述のGödelの不完全性定理である．すなわち十分に〝具体的〞に記述された体系においては

その体系が〝無矛盾〞ならば

〝その体系の無矛盾性〞はその体系では証明できない

ということである．

いくらかの例をとると，自然数論の無矛盾性は解析学の中で証明できるであろうが，自然数論の無矛盾性は自然数論の中では証明できないわけである．このようにして，例えば

〝自然数論〞　〝解析学〞　〝集合論〞

の順に後者の中で前者の無矛盾性が証明できるように強さの順にならんでいるわけで，この順に〝無矛盾性〞の証明も困難になるわけである．もっとも，今の段階では信じ難いことであるが，もし形式的矛盾があるのであれば，その〝矛盾〞の証明というのは後の方がより容易なはずである．確かなことは〝矛盾〞にしろ〝無矛盾〞にしろ我々は深くは知っていないことである．

さて，modelが一意的でないことは，自然数論等でも同様であって〝形式化〞された〝どんな〞自然数論も〝素朴〞でないmodelを有するわけである．

我々が"素朴"に思いおこすことのできる"自然数"とか"実数"，これを標準的(standard)とよび，そうでないものを，これに対して超準的，または非標準的(non-standard)とよんでいるわけである．

数学の証明というのはそれが"与え"られれば，それは任意の体系で成立するわけであるから，標準的な"体系"を考えながら証明したものであっても，超準的なものまで及んでしまうわけで，それを"歓迎"しないといっても，公理とか推論法則を何個か増やすというような"形式的"な手だてをもって超準的なものを"閉め出す"わけにはいかないのである．

しかし，少し心を開いて，素朴性に執着することからしばらく離れることにすれば，超準的なものと標準的なものに形式の上での区別がないということから，超準的なものについての性質が標準的な性質に及ぶわけで，このことを用いて標準的なものに関する"証明"を得ようとするわけである．当然のことであろうが，"素朴"ということが重要ではないことを意味しているのではなくて，むしろ"素朴"がいかに強力であるかを物語っているのである．すなわち

"素朴"というのは素朴ではない

ともいえるであろうか．

いずれにしても"証明"の概念は"解釈"という概念を通じて"model"の世界に反映するわけであるから，一方では複雑な概念も他方では単純な性質として"見易く"表現できるということはあり得るわけであるが，もちろん常にそのようになっているわけではないが，一つの性質を異った"側面"から見るというのは大切なことである．このような立場から体系とか証明を見ていこうというのが超準解析 non-standard analysis の立場である．

完全性定理

形式的表現(formal expression)

この意味するところを述べるためには，まず対象(object)と真偽値(truth value)という二つの型(type)に着目しよう．一般にはそれぞれに対して定数(constant)と変数(variable)が対応しているわけである．数の定数記号

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad e \quad \pi \quad i=\sqrt{-1} \quad \gamma$$

等に比して真偽値の定数記号等は例えば

$$\mathbf{0} \quad F \quad \wedge \qquad \mathbf{1} \quad T \quad \vee$$

のようにまだ統一的な記号もない有様であり，例えば$1=2$は〝正しくない〟等といったり，通常の数学の中でも記号化は〝良し悪し〟は別にしてもあまり進んでいないようである．しかし計算機の中とか〝頭〟の中の〝神経〟が，対象と真偽値の間をはっきりと区別したやり方で処理しているとも考えにくい．

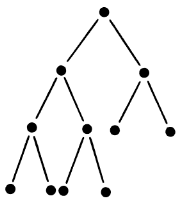
さてobjectを表現するものを項(term)，truth valueを表現するものを論理式(formula)とよんでいる．例えば

$$(a\cdot b+a\cdot c)+a\cdot d$$

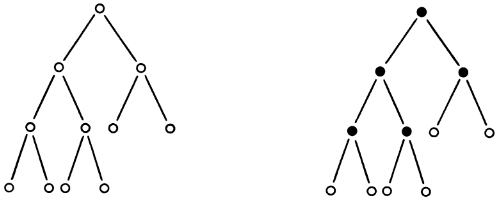
なる項とか

$$a\leq b\wedge b\leq c\to a\leq c$$

なる論理等は同一の木構造(tree structure)



に対応している．例えばobjectを◦，truth valueを・で記せば，それぞれ



のような木構造が対応している．

さて，一般に集合Pの上の部分順序$\leq$に対して，P上に無限下降列

$$\cdots<x_n<\cdots<x_1<x_0$$

がないとき，すなわち降鎖条件(descending chain condition)が成立することを$(P,\leq)$が定礎的(well-founded)とよぶ．これはこの順序に関する帰納法(induction)が成立することを意味している．すなわち，Pのすべての元に対して$A(x)$が成立することを示すには，Pのすべてのxに対して，$y<x$に対して$A(y)$から$A(x)$を示せばよいことを意味している．これは

(1)　　$$\forall x(\forall y<xA(y)\to A(x))\to\forall xA(x)$$

が成立することであるが，推論法則の形に記しておくと見易くて

$$\frac{\forall y < a A(y) \to A(a)}{\to \forall x A(x)}$$

を意味している．ここに a は固有変数 (eigen variable) で下式には表われていないものとする．これは ∀ の導入の推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)}$$

と比べても興味ある形をしている．

さて，上記の項とか論理式の間には部分表現 (subexpression) という部分順序がある．すなわち項とか論理式の構成のより前の段階のものという意味である．

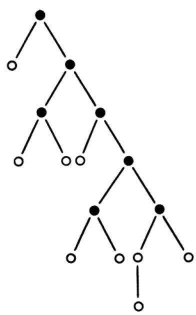
例えば，自然数の全体を含む集合が存在するという "無限公理" (axiom of infinity) は

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y(y \in x \to y' \in x))$$

と表現されているが，

$$0 \in x \qquad \forall y(y \in x \to y' \in x) \qquad y' \in x$$

等はこの論理式の部分表現である．この例では



のような木構造が対応しており，これが一つの部分順序をなしているわけである．

一般に，一つの部分順序体系 $(P, \leq)$ には，$p \in P$ の唯一つの近傍 p^* より成る位相空間が対応している．ここに p^* は

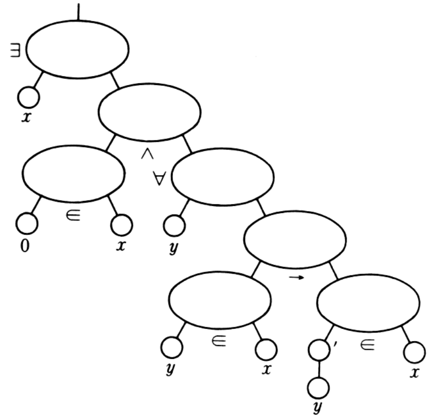
$$q \in p^* \equiv q \leq p$$

で定められている．この位相空間が Kolmogorov 空間であるための必要十分条件は

$$p \leq q, q \leq p \to p = q$$

なる反対称律(asymmetric law)が成立することであり，順序の反転$(P, \geq)$によって一方の空間の開集合は他方の空間の閉集合であるから，任意個の開集合の和のみならず，共通部分も開集合となり，逆にこの性質が順序を定めるのである.

さて，上記の場合には，木構造の上に

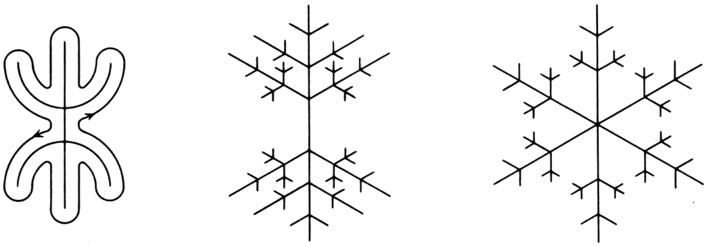


のような"あみだくじ"が対応している．これは方向のついた曲線とそれらを結ぶ方向のついていない曲線から成るものである.

木構造は"loop"を含まない連結なgraphとして定められていることはよく知られているところであろうけれども，一般に木は柿のように"種"から，無花果のように"挿木"によって，また樫のように"切株"からも，枝や根を出して"生長"するのであるからloopは含まないわけである.

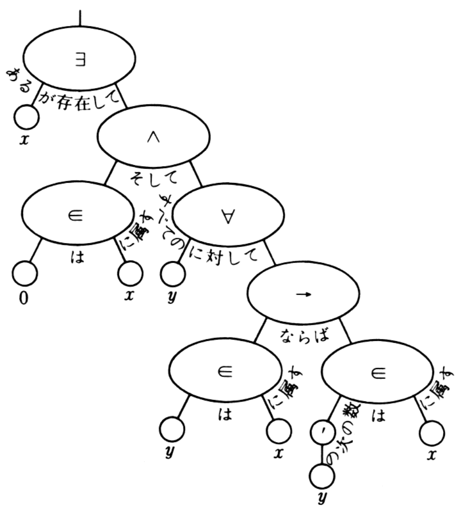
余談になって申し訳ないが，木も古くなると中に空洞ができ，さらに進むと向う側が見えるようになったりする．このような場合は何かloopが含まれるような印象を受けるかも知れない．事実，導管や篩管は葉や根の先でつながっているのであろうが，例えば導管のみでloopをなすことはないのである．このような場合は導管を作っている細胞は栄養分がとれず"生長"することはおろか"枯死"に到ることになるわけで，導管とか篩管では順序の関係は重要な意味を有しているのである.

さてloopを含まない連結なgraphが，例えば平面上にある場合は，木とか雪の結晶のように，その補集合の上に一つの向きが生ずるのである．これは一つのringと同相である．この順序によって文字(alphabet)を"読む"ので，これが木構造から決定される"語"(word)とか"文章"(sentence)である.



そして上記の例のように束縛記号 (quantifier) ∃, ∀ は右読み, successor ′ は左読み, そして通常二変数の記号 ∈, ∧, → 等は下読みとなっている. しかし Poland 式記法 (polisch notation) とか, 逆 Poland 式記法のようにすべての記号を右とか左読みに統一することもある. この線形順序はよく知られているように, いわゆる辞書式の順序 (lexicoqraphic order) であって, 我々が通常, "絵" を通じてではなくて "声" で話し合う場合は "木構造" を線形順序にそった "文章" によって表現しているわけであるから, このようなことは二, 三歳にもなれば "知って" いるのである.

そして, 例えば日本語のような自然言語では一つの記号に単一の alphabet が割当られているわけではなくて, 何個かの word の組が対応している. 上の例では



そして, 例えば英語への変換, 翻訳では, とても名訳とはなり得ないが, それぞれの block を, 例えば

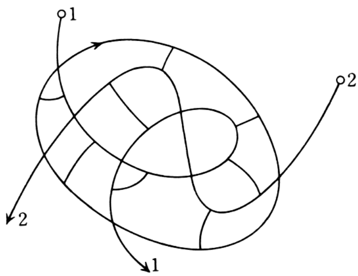


を次の block,



等でそれぞれ置換えるわけで，文章の global な性質がこのような local な性質で保たれるというのが重要な点である．

loop を含まない〝あみだくじ″について述べてきたが loop を含むものについても同様であって，例えば



のようなものでは一つの loop を含むもので木構造より生ずるものではない．

いずれにしても，このような〝あみだくじ″では方向の指定されていない線が互いに逆方向に一度づつ〝たどられる″こと，代入の操作が〝継木″に相当すること，翻訳の操作が同種の小 block の〝置換″によってなされること等考え合せ，最近の分子生物学等の話を聞くにつけて将来の計算〝機″とか情報処理の media として生物化学的な〝数理化学″が用いられないというのは〝ちょっと″考えにくいことである．

さて今まで項とか論理式のような形式的表現について述べてきたわけであるが，この双対の概念としての model とか解釈について述べる．このために型の木構造について今少し述べておく．基本的型 (urtype) は object の型 0 と truth value の型 1 であって，その対応と名称および定数記号の例を記しておくと

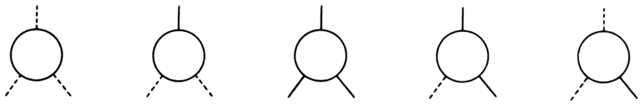
0　対象　object　$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad \pi \quad e$

1	真偽値	truth value	**0** **1**
$0 \cdots 0 \to 0$	函数	function	$\sqrt{}$! + × ÷ −
$0 \cdots 0 \to 1$	述語	predicatc	= ≤ ∈
$1 \cdots 1 \to 1$	論理記号	logical connective	¬ ∨ ∧ → ≡
$01 \to 1$	束縛記号	quantifier	∃ ∀
$01 \to 0$	抽象記号	abstraction	{ | }

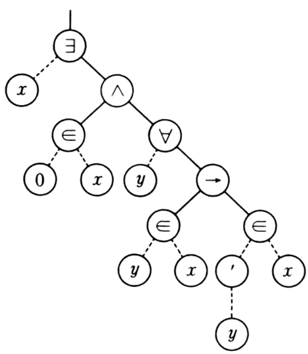
のようであり，これにも前と同様，木構造の block を対応させておくと見易いであろう．例えば対象とか真偽値の型には，それぞれ破線および実線を対応させ，



例えば二変数の函数，述語，論理記号，束縛記号，抽象記号などには



等を対応させ，互いに同種の線とのみ結合するものとし，上端のみが閉じられないで残っているものを型とするのである．以前の例では



さて，次に解釈 (interpretation) について記しておく．これは各々の型の記号の上の対応によって決定するものである．古典述語論理ではそれぞれの型には集合または函数が対応している．その名称を記しておくと

0	underlying set	A_0
1	Boolean algebra	$\mathscr{B}$
$0 \cdots 0 \to 0$	function	$A_0^n \to A_0$
$0 \cdots 0 \to 1$	predicate	$A_0^n \to \mathscr{B}$

$1\cdots 1\to 1$　logical cnnectives　$\mathscr{B}^n\to\mathscr{B}$

$01\to 1$　quantifier　$(A_0\to\mathscr{B})\to\mathscr{B}$

特に論理記号に対しては Boole 代数の函数が

$$\begin{array}{ccccc} \neg & \vee & \wedge & \to & \equiv \\ - & + & \cdot & \Rightarrow & \Leftrightarrow \end{array}$$

のように対応している．ここに

$$a\Rightarrow b=-a+b=b^a$$

$$a\Leftrightarrow b=a\cdot b+-a\cdot -b$$

であり，特に $\Rightarrow$ は指数に対応している．束縛記号 $\exists, \forall$ については $f: A_0\to B$ に

$$\sum_{x\in A_0} f(x) \qquad \prod_{x\in A_0} f(x)$$

を対応させるものである．そして例えば

$$\langle\exists xA(x)\rangle=\sum_{x\in A_0}\langle A(x)\rangle$$

等とするのである．通常の二値の場合 $B=\{0,1\}$ であるから

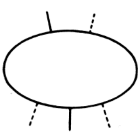
$$\langle\exists xA(x)\rangle=1 \equiv \exists x(\langle A(x)\rangle=1)$$

が成立し，存在〝記号〟が〝存在〟という〝意味〟を有するのである．

このような型の体系は〝直観主義論理〟に対応するもので，〝古典論理〟との類推からすればむしろ

$$0\,1\,0 \to 1\,0$$

等も型として許すのが自然のようである．これは



のような図形に対応しているわけで，〝出力〟の方は〝いずれか〟一方をたどると解釈すべきであって，〝決定論理〟でない解釈が対応している．さらに一般化して〝出〟および〝入〟の側を記して

$$\text{in}\,|\alpha|\,\text{out}$$

のように解釈すれば，これは〝作用素〟という概念そのもので，対象物とか真偽値の型とかは本質的な区別とならないような体系が考えられるわけで，実際の数学の体系ではむしろ最初から，このようなものを考えているのであろうと思う．また〝一般的〟な性質が何か〝特殊〟に比してより〝望ましい〟と考え

るかも知れないが，実際には必ずしもそうではないであろうと思う．一般的性質から特殊な例を思い浮べることと，特殊な例から一般的性質を思い浮かべることはある意味では逆方向のことであるかも知れないが，物事の理解とか発見の場合には後者の方が自然なような気もする．しかし例えば有限体を知らない人が体の公理を聞いて〝有限体″を発見する能力もやはり大切なものであって一方のみが大切とか自然ということはあり得ないであろう．いわゆる〝演繹″と〝帰納″である．

証明図 (proof figure)

さてここで〝証明″の木構造について説明しよう．G. Gentzen にならって，論理式を何個か〝 ″，で区切った列

$$A_1, \cdots, A_n$$

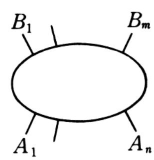
を Γ，Δ 等と記すことにする．このような列を → で結んだ表現，すなわち

$$A_1, \cdots, A_n \rightarrow B_1, \cdots, B_m$$

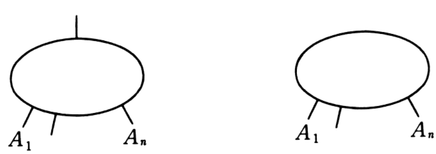
のような表現を考え，これを式 (sequent) とよぶ，この式の内容は

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \quad \text{ならば} \quad B_1 \vee \cdots \vee B_m$$

である．ここに $\wedge$ は and，$\vee$ は or である．これは



のような図形に対応している．この式の一方または両方は空であってもよいものとする．特に右辺が高々一個の式から成るときは直観主義論理に対応しており



のような図形に対応している．したがって，この場合には〝木構造″に対応している．

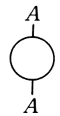
そして通常の，すなわち等号を有する古典述語論理 (classical logic) では〝公

理″(axiom)と何個かの〝推論法則″(inference rule)より成っている.

公理としては

$$A \to A$$

の形の式を用いる. これは恒等写像に対応するもので



のような図形が対応している. そして証明の木構造の中では端点に対応している.

推論法則はいくつかの式から一つの式を導くもので

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi \to \Lambda}$$

とか

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1 \qquad \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Pi \to \Lambda}$$

のような形をしている. これは何個かの式を input して一つの式を output する形をしており, これは式の間の



のような図形に対応しており, 論理式という木構造が, sequent (式) という木構造に, そしてそれが証明という木構造の中に現われ何重にも重なっている. 一本の木とその枝という具合に対応しているわけである.

式の構造に関する推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Pi \to \Lambda} \qquad \begin{matrix} \Gamma \subset \Pi \\ \Delta \subset \Lambda \end{matrix}$$

すなわち上式の右辺, 左辺の論理式がそれぞれ下式の右辺, 左辺に現われるものを用いる.

三段論法 (cut) とよばれる推論法則は

$$\frac{\Gamma \to \Delta, D \qquad D, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}$$

の形をしており, 函数の〝合成″に対応している.

各々の論理記号にはそれに応じた推論法則が対応しており, その記号に〝意

味″を与えている．

〝でない″ ¬ についての推論法則

$$\frac{D, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg D} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, D}{\neg D, \Gamma \to \Delta}$$

〝または″ ∨ についての推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$$

〝そして″ ∧ についての推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B} \qquad \frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$$

そして，〝または″と〝そして″は〝右辺″と〝左辺″の入替によって双対をなしている．

〝すべて″ ∀ についての推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, F(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x F(x)} \qquad \frac{F(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x F(t), \Gamma \to \Delta}$$

a は下式にない　　　　t は任意の項

ここに左の推論法則の変数 a をこの推論法則の固有変数 (eigen variable) とよぶのである．

〝存在″ ∃ についての推論法則

$$\frac{\Gamma \to \Delta, F(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x F(x)} \qquad \frac{F(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x F(x), \Gamma \to \Delta}$$

t は任意の項　　　　a は下式にない．

右の推論法則の変数 a もこの推論法則の固有変数とよばれる．ここでも ∀, ∃ の間に双対性がある．

公理から始まって推論法則をたどっていった木構造を証明図 (proof figure) とよび，その終りの式になり得るものを証明可能な式とよぶ．例えば

$$\exists x \forall y F(x, y) \to \forall y \exists x F(x, y)$$

は証明可能であるけれども

$$\forall y \exists x F(x, y) \to \exists x \forall y F(x, y)$$

は証明可能ではないのである．例えば $F(x, y)$ として $x=y$ 等を考えてみれば二つの元が存在すればもう正しくない式であることがわかる．もっとも元が唯一つであれば〝存在″も〝すべて″も同一の意味になってしまう．そして例え

ば

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(a,b)\to A(a,b)}{A(a,b)\to \exists xA(x,b)}}{\forall yA(a,y)\to \exists xA(x,b)}}{\forall yA(a,y)\to \forall y\exists xA(x,y)}}{\exists x\forall yA(x,y)\to \forall y\exists xA(x,y)}$$

は証明の例である.

日常用いている，いわゆる〝古典述語論理〟の体系はこのように対称性をもった美しい体系として与えられている．けれども，数学等での実際上の記述の場面では，まだ自然な言語としてあまり用いられているとはいい難い．今後に，記号や記法の簡潔さ自然さが求められているのであろうし，十分に多くの改良の余地を残しているのであろう.

公理から始まる証明というものは証明の check には適しており，これで十分納得できる場合はよいとしても，実際には証明を〝作る〟ことによって〝得心〟する場面も多いと思う．この場合はどうも上下が反転しているような気が，自分には，する．同値な関係で結ばれているこのような形式的なことは〝どうでもよい〟という立場もあるかも知れない．しかし〝自然さ〟とか〝心になじむ〟というようなことはずい分大切なことと思うし，またそれによって一つのことが可能になったりすることもあり得ると思うのである.

等号に関する推論法則は

$$\frac{t=t,\ \Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta}$$

と次のような推論法則より成っている

$$\frac{s=t,\ A(s),\ A(t),\ \Gamma\to\Delta}{s=t,\ A(s),\ \Gamma\to\Delta}\qquad\frac{s=t,\ \Gamma\to\Delta,\ A(s),\ A(t)}{s=t,\ \Gamma\to\Delta,\ A(s)}$$

$$\frac{s=t,\ A(s),\ A(t),\ \Gamma\to\Delta}{s=t,\ A(t),\ \Gamma\to\Delta}\qquad\frac{s=t,\ \Gamma\to\Delta,\ A(s),\ A(t)}{s=t,\ \Gamma\to\Delta,\ A(t)}$$

例えば，通常等号に関する公理とよばれている式も

$$\frac{t=t\to t=t}{\to t=t}\qquad\cfrac{\cfrac{A(s)\to A(s)}{t=s,\ A(t),\ A(s)\to A(s)}}{t=s,\ A(t)\to(s)}$$

のようにして証明可能である.

ここで，この体系と同値なもので，証明とか記述のこと，記等機等での論理計算処理とか出力のことなど考えながら試みたものを記してみようと思う．

まず，推論法則というものは正しい式から正しい式を導くものであるから，下式にある情報はすべて上式にあるわけであるから，上式は下式を含んでいると考える．すなわち，例えば

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

のような推論法則も

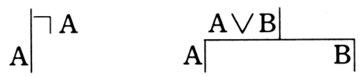
$$\frac{A, \Gamma \to \Delta, \neg A}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

のような推論法則で置換えても体系としては同値である．

式の中の → と論理記号としての → を区別するため，右辺と左辺を分ける｜で，これを置換え上下を反転し Γ，Δ 等を消して，例えば

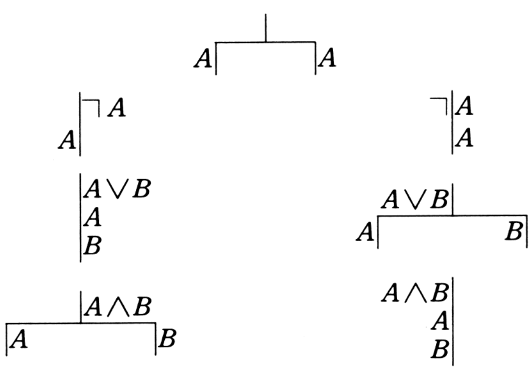
$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta} \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta \qquad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$$

の代りに



のように記す．すなわち $|\neg A$ の下に $A|$ を“作る”または“記す”という意味である．$A \vee B|$ の場合には二つの“枝”を作って同様のことを行なうことである．

このような記法で推論法則を記しておくと



$$\begin{array}{r|l} & A\to B \\ A & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} A\to B & \\ \hline B \;|\; & \;|\; A \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & A\equiv B \\ \hline A \;|\; B & B \;|\; A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} A\equiv B & \\ \hline A \;|\; & \;|\; A \\ B \;|\; & \;|\; B \end{array}$$

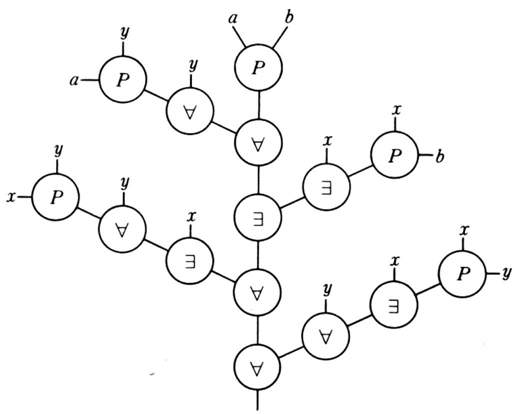
$$\begin{array}{r|l} & \forall x A(x) \\ & A(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \forall x A(x) & \\ A(t) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \exists x A(x) \\ & A(t) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \exists x A(x) & \\ A(a) & \end{array}$$

等であり，a はこれらの推論の固有変数で $A(a)$ より上の式には表われないものとする．意味からいえば，このような元に a という新しい“名前”をつけるという積極的意味をもっている．そしてこのような推論の“枝”を伸して ｜ の両辺に同一の論理式から表われる場合，それが証明図であるとするわけである．例えば

$$\begin{array}{r|l} \exists x \forall y P(x, y) & \forall y \exists x P(x, y) \\ \forall y P(a, y) & \exists x P(x, b) \\ P(a, b) & P(a, b) \end{array}$$

であって，左辺では下向きに，右辺では上向に“ならば”で結ばれており，右辺から左辺へは同一の式であることによって結ばれている．これに対応する木構造は，例えば



であって証明構造が“幹”に，論理式が“枝”にそして項が“葉脈”に対応している．“葉”に対応するものは項と論理式の境界“素論理式”であろうか．幹の上には推論法則の記号を記しておいたが，このような木構造を平面の中に置

いたり，3次元の空間に入れたり，時空を考えたりする場合〝幹〞にあたるものが〝細胞〞で〝枝分れ〞は〝細胞分裂〞であろうから，木構造が線でたどられること等を考え合せると色々の連想がわいて興味がつきない．木が〝入れ子〞になっていること，〝年輪〞に当る論理記号の対応する列のことなど考えられるであろう．

模形と解釈

さて形式的表現について記してきたが，その上の函数体系への自然変換(natural transformation)である解釈とmodelについて記しておこう．〝式〞が形式的表現の〝直和〞に対応しており，模型が形式的表現を添字にもつ〝直積〞に対応している．例えば函数記号 f は項 $t_1, \cdots, t_n$ に他の項 $f(t_1, \cdots, t_n)$ を対応させる〝函数〞

$$t_1, \cdots, t_n \longmapsto f(t_1, \cdots, t_n)$$

を定めている．すなわち記号の〝函数化〞である．また述語記号 P についても

$$t_1, \cdots, t_n \longmapsto P(t_1, \cdots, t_n)$$

を対応させる函数であって，このような記号が形式的表現から形式的表現への型を保つ(多変数の)函数になっているのである．

項とか論理式等の形式的表現の全体には部分表現になっているという定礎関係(well-founded relation)があって，それによって定礎順序(well-founded ordering)が生成されるわけである．

さて，各々の記号に函数を対応させたものを解釈(interpretation)とよぶのである．もちろん，これが型0の変数 $a, b, \cdots$ 等であれば，対応するものは0変数の函数，すなわち単なるobjectである．これによって，上記の定礎順序による帰納法で，すべての形式的表現の〝値〞が定まるわけである．記号から函数への解釈が〝微分方程式〞に対応していて，形式的表現の値が〝積分〞に対応しているとも考えられる．

形式的表現が与えられれば，その部分表現の全体をその近傍として一つの位相空間をなすが，この中では型0の変数記号はこの中での弧立点となり，このような始元(initial object)の全体が稠密開集合を為しているわけであり，各々の点が弧立点であることは，その上の任意の函数が連続函数であることを意味しており，稠密であることはその函数が一意的に連続函数として延長できるこ

とを意味している．この延長の手続を〝計算″とよんでいるわけである．一つの形式的表現に表われる始元の数は有限個であって，これはもちろん compact である．しかし，この位相空間は Hausdorff 空間でないので一般には閉集合ではないのである．

定数記号の解釈については特別の制限があるのが普通である．真偽値に応ずるものは完備ブール代数 (complete Boolean algebra) で，特に重要なのは，〝真″〝偽″のみによる 2 元の代数 $\mathbf{2}=\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ である．論理の定数記号については

$$\begin{array}{ccccccc} \neg & \vee & \wedge & \to & \equiv & \exists & \forall \\ - & + & \cdot & \Rightarrow & \Leftrightarrow & \Sigma & \Pi \end{array}$$

が対応している．

変数記号の解釈については，形式的表現 E が与えられたとき，束縛されていない，すなわち $\exists x$，$\forall x$ のような x として表われない変数，これを自由変数 (free variable) とよぶ．しかし $a_1, \cdots, a_n$ に入っているとき，

$$E(a_1, \cdots, a_n)$$

のように記す．すなわち E は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ (と何個かの定数記号，その上の解釈はあらかじめ定まっている) の閉包に属すという意味である．変数の解釈を ψ とすると，連続性によって $\psi(E)$ の値は $\psi(a_1), \cdots, \psi(a_n)$ の値のみによって決定するから，

$$\psi(a_1)=u_1, \cdots, \psi(a_n)=u_n$$

とおいて，これを

$$\langle E(u_1, \cdots, u_n)\rangle$$

と記したり，単に $E(u_1, \cdots, u_n)$ のように記す．習慣によって E が項の場合は省略され，論理式の場合は省略しないで記す場合が多い．例えば

$$\begin{array}{cccc} \langle\neg A\rangle & \langle A\vee B\rangle & \langle\exists xA(x)\rangle & \langle\forall xA(x)\rangle \\ -\langle A\rangle & \langle A\rangle+\langle B\rangle & \sum_{x\in A_0}\langle A(x)\rangle & \prod_{x\in A_0}\langle A(x)\rangle \end{array}$$

等は上下等しいというのが定義である．

このようにして論理式の木構造である式

$$A_1, \cdots, A_n \to B_1, \cdots, B_m$$

の木構造である推論法則

$$\frac{\Gamma\to\Delta}{\Pi\to\Lambda} \qquad \frac{\Gamma_1\to\Delta_1 \quad \Gamma_2\to\Delta_2}{\Pi\to\Lambda}$$

等の値も定まるわけである．すなわち式については

$$\langle A_1\rangle\cdot\cdots\cdot\langle A_n\rangle \Rightarrow \langle B_1\rangle+\cdots+\langle B_m\rangle$$

である．$a\Rightarrow b=-a+b$ であるからこれは

$$-\langle A_1\rangle+\cdots+-\langle A_n\rangle+\langle B_1\rangle+\cdots\langle B_m\rangle$$

のように“和”の形でも表現できるのである．式についても

$$\langle \Gamma\to \Delta\rangle \Rightarrow \langle \Pi\to \Lambda\rangle$$

$$\langle \Gamma_1\to \Delta\rangle\langle \Gamma_2\to \Delta_2\rangle \Rightarrow \langle \Pi\to \Delta\rangle$$

とするのである．

これより帰納法によって“証明可能”なら“正しい”こと，すなわち $\Gamma\to\Delta$ が証明可能なら

$$\langle \Gamma\to \Delta\rangle=1$$

であることが，証明に関する帰納法で示される．公理については

$$\langle A\to A\rangle=-\langle A\rangle+\langle A\rangle=1$$

三段論法については

$$(\langle \Gamma\to \Delta\rangle+\langle D\rangle)(\langle \Gamma\to \Delta\rangle+-\langle D\rangle)=\langle \Gamma\to \Delta\rangle\cdot(\langle D\rangle+-\langle D\rangle)=\langle \Gamma\to D\rangle$$

$\neg$ については，例えば

$$\langle \Gamma\to \Delta, A\rangle=\langle \Gamma\to \Delta\rangle+\langle A\rangle=\langle \Gamma\to \Delta\rangle+-\langle\neg A\rangle=\langle\neg A, \Gamma\to \Delta\rangle$$

であり，他の論理記号についても同様である．$\exists$ については

$$\langle \exists xA(x)\rangle=\sum_{x\in A_0}\langle A(x)\rangle$$

であり，A_0 は model の object の全体であったから

$$\langle \Gamma\to \Delta\rangle+\langle A(t)\rangle\leq\langle \Gamma\to \Delta\rangle+\langle \exists xA(x)\rangle$$

となる．そして本質的な場合は例えば

$$\frac{A(a), \Gamma\to \Delta}{\exists xA(x), \Gamma\to \Delta}$$

の場合である．a は Γ，Δ の中に表われないのであるから a の解釈“だけ”を A_0 の“任意”の元 p に変えると，Γ，Δ の値は不変であることから，仮定より

$$-\langle A(p)\rangle+\langle \Gamma\to \Delta\rangle=1$$

が成立する．これは $\langle A(p)\rangle\leq\langle \Gamma\to\Delta\rangle$ を意味しており，$p\in A_0$ は“任意”であったから，それらの上限をとって

$$\langle \exists xA(x)\rangle=\sum_{x\in A_0}\langle A(x)\rangle\leq\langle \Gamma\to \Delta\rangle$$

が成立するわけである．これで証明は終ったわけであるが，論理記号に等号 ＝

を含む場合は model に性質

$$\langle t=t\rangle=1 \qquad \langle s=t\rangle\cdot\langle A(s)\rangle\leq\langle A(t)\rangle$$

を満足することを要求するのである.

この逆の方向が，いわゆる完全性定理 (completoness theorem) で $\Gamma\to\Delta$ が証明不可能であれば $\langle\Gamma\to\Delta\rangle<1$ となる解釈，したがって反例とよばれる model が〝存在〟するというのである.

完全性定理の証明のためには，推論図を逆に〝たどる〟ことを考える．すなわち，それぞれの論理記号による〝分解式〟を考えるのである．式

$$\Gamma\to\Delta$$

が与えられたとき，$\neg$ についての分解式は，Γ, Δ の中の一番外の記号が $\neg$ である論理式をそれぞれ

$$\neg A_1,\ \cdots,\ \neg A_n \qquad \neg B_1,\ \cdots,\ \neg B_m$$

とするとき，

$$\frac{B_1,\ \cdots,\ B_m,\ \Gamma\to\Delta,\ A_1,\ \cdots,\ A_n}{\Gamma\to\Delta}$$

を作る．この分解式からは $\neg$ についての推論法則を何回か用いて

$$\frac{\dfrac{B_1,\ \cdots,\ B_m,\ \Gamma\to\Delta,\ A_1,\ \cdots,\ A_n}{\neg A_1,\ \cdots,\ \neg A_n,\ \Gamma\to\Delta,\ \neg B_1,\ \cdots,\ B_m}}{\Gamma\to\Delta}$$

となるから上式が証明可能なら下式も証明可能である．つまり

〝下式が証明不可能ならば上式も証明不可能〟

である.

$\vee$ についての分解式は Γ，Δ の一番外の記号が $\vee$ の論理式をそれぞれ

$$A_1^0\vee A_1^1,\ \cdots,\ A_n^0\vee A_n^1 \qquad B_1^0\vee B_1^1,\ \cdots,\ B_m^0\vee B_m^1$$

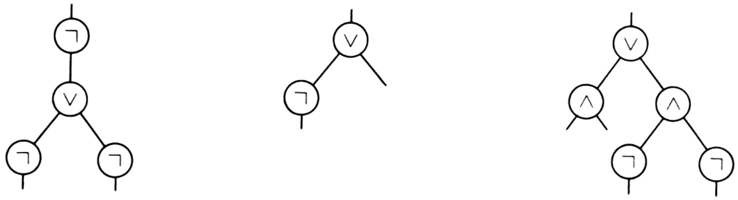
とするとき，2^n 個の分解式を

$$\frac{A_1^{\varepsilon_1},\ \cdots,\ A_n^{\varepsilon_n},\ \Gamma\to\Delta,\ B_1^0,\ B_1^1,\ \cdots,\ B_m^0,\ B_n^1}{\Gamma\to\Delta} \qquad \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n=0,1$$

とするのである．この 2^n 個の分解式から何回かの $\vee$ に関する推論法則で下式が証明できるので，

〝下式が証明不可能ならば証明不可能な上式が存在する〟

他の論理記号 $\wedge$, $\to$, $\equiv$ についても同様の分解式を導入してもよいし，それぞれ



で置換えてもよい.

∃ についての分解式は Γ, Δ の一番外の記号が ∃ の論理式をそれぞれ

$$\exists x_1 A_1(x_1),\ \cdots,\ \exists x_n A_n(x_n) \qquad \exists y_1 B_1(y_1),\ \cdots,\ \exists y_m B_m(y_m)$$

とする. これと別に変数および項をそれぞれ

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$
$$t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n, \cdots$$

のようにならべておく. 自然数 k に対する ∃ の分解式を

$$\frac{A_1(a_{p_1}), \cdots, A_n(a_{p_n}), \Gamma \to \Delta, B_1(t_1), \cdots, B_1(t_k), \cdots, B_m(t_1), \cdots, B_m(t_k)}{\Gamma \to \Delta}$$

とするわけである. ここに $a_{p_1}, \cdots, a_{p_n}$ は Γ, Δ の中に表われない相異なる自由変数を番号の小さいものから順にとったものである. この場合も上式から ∃ の推論法則を用いて下式が証明できる.

= についての分解式は Γ の中の一番外の記号が = である論理式を

$$t_{i_1}=t_{j_1} \quad t_{i_2}=t_{j_2} \quad \cdots \quad t_{in}=t_{jn}$$

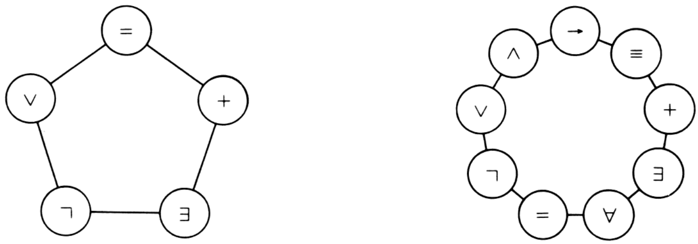
とするとき, = に関する分解式は, $s=t$ の下では $A(s)$ と $A(t)$ の値は変らないという意味であるから, 例えば Γ の中に現われる論理式の中の s と t を適当に置換して得られる論理式の全体を $\Gamma\binom{t}{s}$ と記すことにして,

$$\frac{t_1=t_1, \cdots, t_k=t_k, \Gamma\binom{t_{i_1}}{t_{j_1}}, \cdots, \Gamma\binom{t_{in}}{t_{jn}}, \Gamma \to \Delta, \Delta\binom{t_{i_1}}{t_{j_1}}, \cdots, \Delta\binom{t_{in}}{t_{jn}}}{\Gamma \to \Delta}$$

とする. この場合も上式から何回かの = に関する推論法則を用いて下式が証明可能であるから,

〝下式が証明不可能ならば上式も証明不可能〞

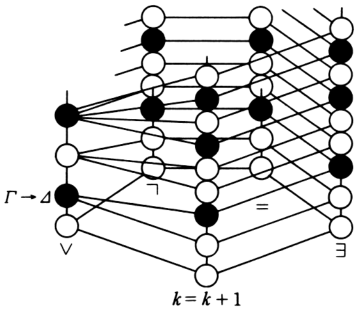
である. そこで, 例えば次のような loop, すなわち 0 人用の〝あみだくじ〞を考える



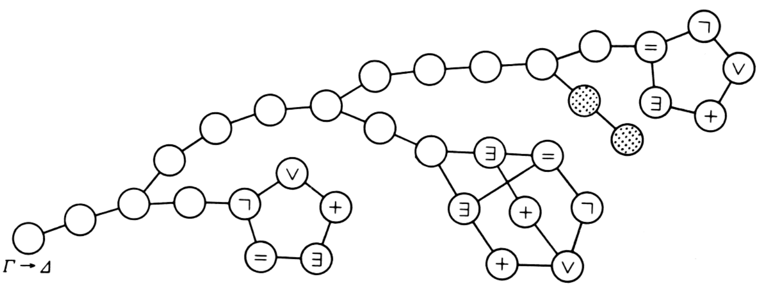
ここに -⊕- は $k=k+1$ すなわち k の値を $k+1$ で置換えることを意味しているものとする．これにしたがって，与えられた式

$$\Gamma \to \Delta$$

を分解してゆくわけである．注意すべき点はこれらの操作が〝局所的〞であることである．例えば ring の上の covering space のように考えると

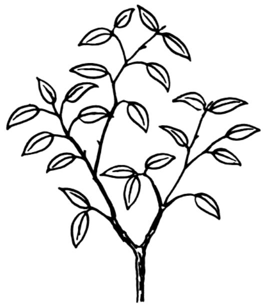


のようである．上図では $\Gamma \to \Delta$ が証明不可能であるとして，●で証明不可能な式のある場所を記しておいた．またこのような〝分解器〞が式の上に作用していると考えて次のようなものを想像することもできるであろう．



それぞれ ¬，∃，＝ についての分解を行おうとしているところで，中央の部分では分解器が〝分裂〞しようとしているところ，◎では両辺に同一の式があって分解の必要がなくなって〝枯れた〞ところである．

　このようにして与えられた式から出発して，このような分解を行うと有限分



岐的〝木構造〞が得られる．
そして木構造は自然に一つの部分順序体系であり，有限分岐的であることより極大有向集合は極大な枝であって，これは〝葉〞によって代表されるのである．今の場合は無限の長さの枝である．このような概念，すなわち木構造とその双対空間，極大有向集合の集合，の対応は落葉樹の〝夏と冬〞に見ることができるであろう．すなわち〝葉〞の全体の位相空間が〝木〞の完備化であり，これが全不連続 (totally disconnected) な compact Hausdorff 空間をなし，さらに Baire の性質も有するというのが Stone の表現定理である．

さて，木構造 T の双対空間 T^* の元 p を考えると，その上にある式の列

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma_{p,2}\to\Delta_{p,2} \\ \hline \Gamma_{p,1}\to\Delta_{p,1} \\ \hline \Gamma\to\Delta \end{array}$$

が対応している．そこで

$$\Gamma_p=\bigcup_{n\in\omega}\Gamma_{p,n} \qquad \Delta_p=\bigcup_{n\in\omega}\Delta_{p,n}$$

を考える．論理式 A について

$$\{p\in T^*\,|\,A\in\Gamma_p\cap\Delta_p\}$$

は T^* の開集合であるから

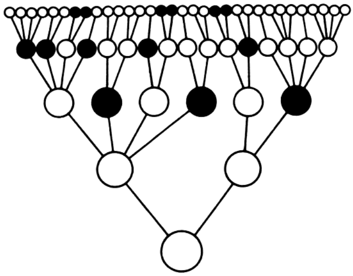
$$U^*=\{pT^*\,|\,\Gamma_p\cap\Delta_p=\phi\}$$

は閉集合，よって compact である．そこで二つの場合を考える．すなわち

（1） $U^*=\phi$ ならば $\Gamma\to\Delta$ は三段論法なしで証明可能

（2） $U^*\neq\phi$ ならば $\langle\Gamma\to\Delta\rangle\neq 1$ となる解釈がある．

まず $U^*=\phi$ の場合には T^* がcompact であることより，有限個の場所があ



って，すべての p はその点を含む.

このような場所では，$\Gamma_{p,n}\to\varDelta_{p,n}$ の両辺に同一の論理式が含まれるわけで

$$\frac{A\to A}{\Gamma_{p,n}\to\varDelta_{p,n}}$$

を補って，三段論法を用いないで証明可能となるわけである.

次に，$U^*\neq\phi$ の場合には $p\in U^*$ とする．この体系の形式的表現の全体を考え，記号の "函数化" を考え，項それ自体を対象と見なす "自然解釈" を考える．素論理式については

$$\langle P(t_1,\ \cdots,\ t_n)\rangle_p=\begin{cases}1 & P(t_1,\ \cdots,\ t_n)\in\Gamma_p,\\ 0 & \text{その他のとき},\end{cases}$$

とする．論理式に関する帰納法によって

$$A\in\Gamma_p\to\langle A\rangle_p=1$$
$$A\in\varDelta_p\to\langle A\rangle_p=0$$

が成立する．$\Gamma\subset\Gamma_p,\varDelta\subset\varDelta_p$ に注意すれば，

$$\langle\Gamma\to\varDelta\rangle_p=0$$

すなわち，任意の $p\in U^*$ が反例を定めるわけである．U^* が大きい程多くの反例がある．完備ブール値の model の場合は

$$\langle P(t_1,\ \cdots,\ t_n)\rangle=\mathrm{int}\,\overline{\{p\in U^*\,|\,P(t_1,\ \cdots,\ t_n)\in\Gamma_p\}}$$

とすればよい.

$\Gamma\to\varDelta$ が，三段論法を用いないで証明不可能であれば $U^*\neq\phi$ であるから，それは三段論法を用いても証明不可能である．すなわち三段論法を用いて証明可能ならば三段論法を用いないで証明可能である．いわゆる三段論法の消去定理である．上で定義された model は可算 model である.

algorithm の点からすれば，分解式の構成法は帰納的であるが，

"証明を与えて停止する"

すなわち $U^*=\phi$ かどうかは一般には帰納的，すなわち"計算可能"でないのである．このような場合には反例は"存在"するが"帰納的"には定義できないというようなことがあり得るわけである．そして計算可能な場合も多いが，計算可能かどうかは一般には"計算可能"ではないのである．さて例えば

$$\forall x\forall y\forall z(x(yz)=(xy)z),\quad \forall x\exists y(xy=1),\quad \forall x(1x=x)\rightarrow \forall x\exists y(yx=1)$$

に対して分解を行うと，最初の部分は

$$\begin{array}{cccc|c}
\forall x\forall y\forall z(x(yz)=(xy)z) & \forall x\exists y(xy=1) & \forall x(1x=x) & & \forall x\exists y(yx=1)\\
 & \exists y(ay=1) & 1a=a & & \exists y(ya=1)\\
 & \exists y(1y=1) & 11=1 & & 1a=1\\
 & & & & aa=1
\end{array}$$

二元 $\{1, a\}$ が反例であり得るならば

$$1a=a\quad 1\,1=1\quad 1a\neq 1\quad aa\neq 1$$

であるから, $1a=a$, $aa=a$ でなくてはならず $\exists y(ay=1)$ より $a1=1$ を得る．すなわち

$$aa=a\quad a1=1\quad 1a=a\quad 1\,1=1$$

であって $\forall x\forall y(xy=y)$ が成立し, したがって $\forall x\forall y\forall z(x(yz)=(xy)z)$ も成立する．よってこれが反例の一つで上の式は証明不可能である．これに対して

$$\forall x\forall y\forall z(x(yz)=(xy)z),\ \forall x\forall y(xy=1),\ \forall x(x1=x)\rightarrow \forall x\exists y(yx=1)$$

の分解を行うと，かなりの省略はあるが

$$\begin{array}{cccc|c}
 & \forall x\forall y\forall z(x(yz)=(xy)z) & \forall x\exists y(xy=1) & \forall x(x1=x) & \forall x\exists y(yx=1)\\
(ba)b=b & b(ab)=(ba)b & \exists y(ay=1) & b1=b & \exists y(ya=1)\\
ba=bc & (ba)(bc)=((ba)b)c & ab=1 & (ba)1=ba & ba=1\\
ba=1 & & \exists y(by=1) & & \\
 & & bc=1 & &
\end{array}$$

のように $ba=1$ が両辺に出て，三段論法なしで証明可能となることがわかる．これは群においては左右の逆元が一致するというよく知られている性質である．

証明と模型

今まで形式的体系(formal system)とそれに対する模型(model)または構

造 (structure) およびそれらを結び合せている解釈 (interpretation) の概念について述べてきた．これらの中心をなす概念をまとめておくと，型 (type) とよばれる (多変数の) 圏 (category) $\boldsymbol{T}$，形式的表現 (formal expression) とよばれるその上の category $\boldsymbol{F}$，模型 (model) または構造 (structure) とよばれる函数より成る category $\boldsymbol{M}$，そして解釈とよばれる $\boldsymbol{F}$ から $\boldsymbol{M}$ への射 (functional morphism)，これは自然変換 (natural transformation) ともよばれている，より成っている．

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{F} & \xrightarrow{\psi} & \boldsymbol{M} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \boldsymbol{T} & \end{array}$$

ここに $\boldsymbol{C}$ は定数記号であって，これは必ずしも category をなすとは限らない．

論理式 A について $\psi(A)=1$ つまり $\boldsymbol{M}$ の truth value である Boole 代数の中の最大元であるとき，

$$M\models_{\psi} A$$

と記し，論理式 A は，$\boldsymbol{M}$ への解釈 ψ で "正しい" とよむ．特に A が文章 (sentence) のとき，すなわち自由変数を含まないときは $\psi(A)$ は ψ に関係しないので単に

$$M\models A$$

と記し A は $\boldsymbol{M}$ の中で成立するという．A が自由変数を含む論理式 $A(a_1, \cdots, a_n)$ についてはその closure $\forall x_1 \cdots \forall x_n A(x_1, \cdots, x_n)$ が正しいときに正しいとよぶのが普通である．

二つの model $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ について射 $\phi: \boldsymbol{M}_1\rightarrow \boldsymbol{M}_2$

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M}_1 & \xrightarrow{\phi} & \boldsymbol{M}_2 \\ \psi_1\nwarrow & & \nearrow\psi_2 \\ & \boldsymbol{F} & \end{array}$$

が functional morphism であれば，例えば論理式 A については $\phi(\psi_1(A))=\psi_2(A)$ であるから

$$\boldsymbol{M}_1\models_{\psi_1} A\rightarrow \boldsymbol{M}_2\models_{\psi_2} A$$

が成立する．特に $\boldsymbol{M}_1$，$\boldsymbol{M}_2$ が 2 値の model すなわち真偽値の代数が $\mathbf{2}=\{0, 1\}$ の場合には

$$\boldsymbol{M}_1\models_{\psi_1} A\equiv \boldsymbol{M}_2\models_{\psi_2} A$$

であり，sentence についても同様であるから $\boldsymbol{M}_1$ と $\boldsymbol{M}_2$ はどのような sentence によっても区別できないわけである．

このようにして $\phi: \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ が存在するという関係は model の間の一つの部分順序を生成する．すなわち $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{N}$ の意味するところは

$$\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_1 \to \cdots \to \boldsymbol{M}_n \to \boldsymbol{N}$$

なる列が存在することとするわけである．そこで同値関係 $\boldsymbol{M} \sim \boldsymbol{N}$ を

$$\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{M}$$

によって定義すれば，model の全体が同値類に類別されるわけである．もちろん一般には各同値類は"類"であって"集合"にはなり得ない．この順序における model の有向集合 (directed set) が与えられたとき，それを

$$(\boldsymbol{M}_p : p \in P)$$

とする．ここに $(P, \leq)$ は有向集合である．すなわち

$$\forall x, y \in P \exists z \in P(x, y \leq z)$$

このような P は通常 filter ともよばれている．そして $p \leq q$ に対して

$$\psi_q^p : \boldsymbol{M}_p \to \boldsymbol{M}_q$$

が functional morphism となっており，$p \leq q \leq r$ に対して $\psi_r^q \psi_q^p = \psi_r^p$ となっているとするわけである．この場合その direct limit

$$\boldsymbol{M} = \lim_{p \in P} \boldsymbol{M}_p$$

はやはり model であり

$$\psi^p : \boldsymbol{M}_p \to \boldsymbol{M}$$

は functional morphism になっている．ここで一般の順序体系 $(P, \leq)$ は p の唯一の近傍

$$q \in p^* \equiv p \leq q$$

によって位相空間になることはすでに述べてきたところである．この空間の正則開集合のつくる完備 Boole 代数が，$(P, \leq)$ が有向集合の場合には $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ となるということである．$(P, \leq)$ が有向集合でなければ

$$p_1^* \cap p_2^* = \phi$$

となる $p_1, p_2 \in P$ が存在するから，p_1^* および p_2^* が互いに素な開集合であるからその正則化 int $\overline{p^*}$ はやはり互いに素であり，その Boole 代数は少なくとも 4 個の元を有するわけである．

次に $\phi: \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ が projection になる functional morphism が存在する場合にも，これは model の間の一つの順序を生成する．この場合 $\boldsymbol{N} \leq' \boldsymbol{M}$ と記すことにする．今の場合は二つの順序 $\leq$ と $\leq'$ の間の直接の関係については知らな

い．集合の場合のように構造の入っていない場合には

$$\forall f: a \overset{\text{onto}}{\to} b \exists g: b \to a \,(g \circ f = 1_a)$$

なる関係が成立することが選択公理と同値であることが知られている．この順序における model の有向集合が与えられたとき，それを

$$(\boldsymbol{M}_p : p \in P)$$

とする．そして $p \leq' q$ に対して

$$\psi_p^q : \boldsymbol{M}_q \to \boldsymbol{M}_p$$

が対応しており，$p \leq' q \leq' r$ に対して $\psi_p^r = \psi_p^q \psi_q^r$ が成立しているものとする．このとき射影極限 (projective limit)

$$\boldsymbol{M}^* = \lim_{p \in P}{}^* \boldsymbol{M}_p$$

はやはり model であって

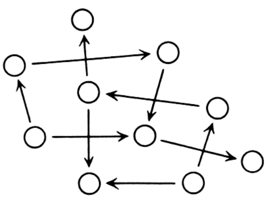
$$\psi_p : \boldsymbol{M}^* \to \boldsymbol{M}_p$$

は projection になっている．

すでに述べてきたところであるが，2 値の model (通常の model) では $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{N}$ とか $\boldsymbol{M} \leq' \boldsymbol{N}$ の下では，任意の文章 (sestence) A に対して $\boldsymbol{M} \models A$ と $\boldsymbol{N} \models A$ は同値であった．そこで

$$\boldsymbol{M} \in A^* \equiv \boldsymbol{M} \models A$$

とすると A^* は model の一つの類であって，関係 $\leq$ で結ばれるものは同一の類に属している．



$$\Gamma = \{A_\nu : \nu \in \Lambda\}$$

を公理系，すなわち自由変数を含まない論理式，sentence の集合とするとき，これを満足する model の全体は

$$\Gamma^* = \bigcap_{\nu \in \Lambda} A_\nu{}^*$$

である．もちろん Γ^* は上記の同値関係で閉じている．

さて論理式 B に対して

$$\Gamma \to B$$

が証明可能であれば,

$$B^* \subset \Gamma^*$$

である．完全性定理によれば，この性質から逆に $\Gamma \to B$ が証明可能となるわけである．それは $\Gamma \to B$ が証明不可能であれば $\boldsymbol{M} \not\in B^*$, $\boldsymbol{M} \in \Gamma^*$ となるものが存在するからである.

次に model の集り $(\boldsymbol{M}_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ があるとき，その直積

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{M}_\lambda$$

を考えると $(\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{F} & \xrightarrow{\phi} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{M}_\lambda \\ & \psi_\lambda \searrow & \downarrow \pi_\lambda \\ & & \boldsymbol{M}_\lambda \end{array}$$

となる ϕ が一意的に定まる. $\boldsymbol{M}_\lambda$ の truth value を $\mathscr{B}_\lambda$ とすれば $\prod_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{M}_\lambda$ のそれは

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda$$

で，これは Boole 代数の直積として Boole 代数である.

一般に，Boole 代数 $\mathscr{B}$ に対して準同型写像

$$h : \mathscr{B} \to 2$$

を考えると $h^{-1}(0)$ は maximal ideal, $h^{-1}(1)$ は maximal filter である. maximal filter はしばしば ultrafilter ともよばれる．これが双対空間をなすわけである．すなわち $\mathscr{B}^*$ を

$$h \in {}^*\mathscr{B} \equiv h : \mathscr{B} \to 2$$

と定め，$a \in \mathscr{B}$ に対して

$$h \in a^* \equiv h(a) = 1$$

を開集合の基として $\mathscr{B}^*$ に位相を入れるわけである．これが totally disconnected, compact Hausdorff 空間で Baire の性質を有するのである.

さて，特に $\mathscr{B}_\lambda = 2 = \{0, 1\}$ のときは

$$\prod_{\nu \in A} \mathscr{B}_\lambda = 2^A \approx \mathscr{P}(A)$$

であるから，$1 = \{0\}$ について $2 = \mathscr{P}(1) = \{0, 1\}$ より

$$h : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(1)$$

である．すなわち A の巾集合 $\mathscr{P}(A)$ の ultrafilter の全体である. $p \in A$ のとき

$$h \in p^* \equiv h(\{p\}) = 1$$

とすると，これは$\mathscr{B}^*$の元であり，点pによって決定される principal filter とよばれている．今，空間Xとして

$$X=\{f : 2^A \to 2\}$$

に弱位相を入れた compact 空間を考えると，$p \in A$に対してp^*は

$$p^*(f)=f(p)$$

で定められるから，この埋込みによって

$$* : A \to X$$

と考えられる．この像を同じAで記すると，$\mathscr{B}^*$はAのXの中で閉包になっており，その基数はXの基数に一致する．もちろん$\mathscr{B}^* \neq X$であって閉集合であるから$\mathscr{B}^*$が compact 等は当然のことである．

model $\boldsymbol{M}_\lambda$の object の全体，すなわち underlying set をA_λと記すとき，$\prod_{\lambda \in A} \boldsymbol{M}_\lambda$のそれは$\prod_{\lambda \in A} A_\lambda$であるからその元は

$$\forall \lambda \in A(f(\lambda) \in A_\lambda)$$

となる函数である．今$h \in \left(\prod_{\lambda \in A} \mathscr{B}_\lambda\right)^*$に対して

$$(f=g)(\lambda)=\langle f(\lambda)=g(\lambda)\rangle$$

すなわち$\boldsymbol{M}_\lambda$の中での$f(\lambda)=g(\lambda)$の正しさ$\langle f(\lambda)=g(\lambda)\rangle$を対応させる函数，を考えると，

$$f=g : A \to 2$$

である．そこで同値関係$\underset{h}{=}$を

$$f \underset{h}{=} g \equiv h(f=g)=1$$

で定めると，これは同値律を満足し，他の函数とも，等号の性質によって，矛盾しない．すなわち，函数記号とか述語記号についても

$$f_1 \underset{h}{=} g_1,\ \cdots,\ f_n \underset{h}{=} g_n \to f(f_1,\ \cdots,\ f_n) \underset{h}{=} f(g_1,\ \cdots,\ g_n)$$

$$f_1 \underset{h}{=} g_1,\ \cdots,\ q_n \underset{h}{=} g_n \to P(f_1,\ \cdots,\ f_n) \underset{h}{=} P(g_1,\ \cdots,\ g_n)$$

である．したがって，この関係で割った model が存在する．それを

$$\prod_{\lambda \in A} \boldsymbol{M}_\lambda / h$$

と記し，model の列$(\boldsymbol{M}_\lambda : \lambda \in A)$の$h$による ultraproduct とよぶ．これを一つの函数のように考えれば

$$\left(\prod_{\lambda \in A} \boldsymbol{M}_\lambda\right)^*(h)=\prod_{\lambda \in A} \boldsymbol{M}_\lambda / h$$

によって $\mathscr{B}^*=\left(\prod_{\lambda\in A}\mathscr{B}_\lambda\right)^*$ の上の model の函数と考えられるわけである．特に $\mathscr{X}_\lambda=2$ の場合には $A\subset\mathscr{B}^*$ で A は $\mathscr{B}^*$ の中の isolated paint ばかりから成る maximal な開集合であり，$p\in A$ に対しては

$$\left(\prod_{\lambda\in A}\boldsymbol{M}_\lambda\right)^*(p^*)=\boldsymbol{M}_p$$

であるから，A 上の model の函数がその閉包 $\mathscr{B}^*$ まで自然な延長を有したわけであり，これは model としての境界値というべきものであろう．

これに関して，すべての $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\lambda\in A}\boldsymbol{M}_\lambda & \underset{h}{\rightarrow} & \prod_{\lambda\in A}\boldsymbol{M}_\lambda/h\\ \nwarrow & & \nearrow\\ & \boldsymbol{F} & \end{array}$$

が functional morphism である，というのが Łos の定理とよばれているものである．

特別の場合として $\boldsymbol{M}_\lambda=\boldsymbol{M}$ のときは定数函数として

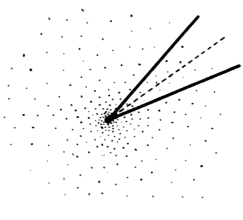
$$\boldsymbol{M}\rightarrow\prod_{\lambda\in A}\boldsymbol{M}\rightarrow\left(\prod_{\lambda\in A}\boldsymbol{M}\right)^*(h)$$

となっており $\boldsymbol{M}$ の超巾 (ultrapower) とよばれ，$\boldsymbol{M}^A/\boldsymbol{h}$ のようにも記される．

添字集合としては色々のものが考えられる．例えば $A=\boldsymbol{C}$，複素平面，の場合を考えてみると $\mathscr{P}(\boldsymbol{C})^*$ は $\boldsymbol{C}$ の compact 化ではあるが単に ∞ を加えたようなものではないがもちろん，そのような空間へは連続で onto な写像は存在する．$p(C)^*$ の点，すなわち極大 filter が唯一点は含まず，可算個の点より成る集合

$$\{p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots\}$$

を含む場合を考えてみると，この部分集合で有界で $\boldsymbol{F}$ に属するものがあれば，ある 1 点に収束するであろうし，またその点に収束する〝方向〟というようなものも考えられる．そうでない場合は ∞ に収束する場合である．この場合には任意の〝可算収束列〟という意味が対応している．Cantor はこの上に非常に強い同値関係を入れて $\boldsymbol{C}$ としたわけである．



もちろん $\mathscr{P}(C)^*$ の元の圧倒的に多くのものは可算集合を含まず，またその元は Lebesgue measure 0 でないものより成っている.

そして例えば添字集合として形式的体系の項とか論理式の集りとかが用いられる場合も多い. 共起性定理 (concurrence theorem) というのがあるが, これ等はこの方向に近いであろう．すなわち，集合 A の元の任意の "有限" 集合

$$u=\{x_1,\ \cdots,x_n\}$$

に対して論理式

$$\exists y(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))$$

が成立するとき R は有限共起的というのであるが，このとき $x\in A$ に対して

$$u\in x^*\equiv x\in u$$

によって定められる A の有限部分集合の集合を考えれば, これは有限交叉性を有するわけで，これを含む ultrafilter が存在する．これに応ずるものを h として超巾を作ると，その中では

$$\exists y\forall x\in AR(x,y)$$

が成立するというものである．これの意味をまとめておくと，$\boldsymbol{M}_0\rightarrow\boldsymbol{M}_1$ なる functional morphism, この場合 elementary extension, を作って

$$\forall n\in w\forall x_1\in A_0\cdots\forall x_n\in A_0\exists y\in A_0(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))\rightarrow\exists y\in A_1\forall x\in A_0R(x,y)$$

となるようにしたわけである. ここに A_i は $\boldsymbol{M}_i$ の object の全体である. もちろん

$$\exists n\in w\exists x_1\in A_0\cdots\exists x_n\in A_0\forall y\in A_0(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))$$

ならば，そのような $x_1,\cdots,x_n\in A_0$ をとって

$$\forall y\in A_0(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))$$

とすれば functional morphism であることより

$$\forall y\in A_1(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))$$

であり, これより $\forall yA_1\exists x\in A_0R(x,y)$ を得る. すなわち上記の式の逆の方向の式

$$\exists y\in A_1\forall x\in A_0R(x,y)\rightarrow\forall n\in w\forall x_1\in A_0\cdots\forall x_n\in A_0\exists y\in A_0(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))$$

を得てこれらの同値であることがわかる．多くの場面では

$$\forall x_1\in A_0\cdots\forall x_n\in A_0\exists y\in A_0(R(x_1,y)\wedge\cdots\wedge R(x_n,y))\equiv\forall x\in A_0\exists y\in A_0R(x,y)$$

なる場合も多く，このようなときは一層明確な関係

$$\forall x\in A_0\exists y\in A_0R(x,y)\equiv\exists y\in A_1\forall x\in A_0R(x,y)$$

を得るわけである．当然のことであるが

$$\exists x \in A_0 \forall y \in A_0 R(x, y) \equiv \forall y \in A_1 \exists x \in A_0 R(x, y)$$

であって，このような交換性定理は論理式の真偽の決定とか意味の理解にしばしば有効なのである．

$$\begin{array}{ccc}
R(x, y) & \overset{\forall x \in A_0}{\text{―――――}} & \forall x \in A_0 R(x, y) \\
\exists y \in A_0 \Big| & & \Big| \exists y \in A_1 \\
\exists y \in A_0 R(x, y) & \underset{\forall x \in A_0}{\text{―――――}} & \begin{array}{c} \forall x \in A_0 \exists y \in A_0 R(x, y) \\ \exists y \in A_1 \forall x \in A_0 R(x, y) \end{array}
\end{array}$$

例を連続という概念にとって

$$\forall n \in N \exists m \in N \forall x \in R\left(|x-a|<\frac{1}{m} \to |f(x)-f(a)|<\frac{1}{n}\right)$$

の中の $\exists m \in N \forall x \in R$ に交換性定理を用いて

$$\forall n \in N \forall x \in R^* \exists m \in N\left(|x-a|<\frac{1}{m} \to |f(x)-f(a)|<\frac{1}{n}\right)$$

ここに R^* は R の functional morphism による拡大である．次に $\forall n \in N$, $\forall x \in R^*$ を交換して

$$\forall x \in R^* \forall n \in N \exists m \in N\left(|x-a|<\frac{1}{m} \to |f(x)-f(a)|<\frac{1}{n}\right)$$

を得る．一般に

$$\forall x \exists y (P(y) \to R(x)) \equiv \forall x P(x) \to \forall x R(x)$$

であるから

$$\forall x \in R^*\left(\forall n \in N\left(|x-a|<\frac{1}{n}\right) \to \forall n \in N\left(|f(x)-f(a)|<\frac{1}{n}\right)\right)$$

と同値であって，non standard な実数 R^* を考えることによって，"無限小"すなわち

$$\forall n \in N\left(|x-a|<\frac{1}{n}\right)$$

のような性質の簡単な関係に導いたわけである．すなわち考察の対象を広げて，論理記号の "絡み" を解いたわけである．このような拡大は何度も操返して行うことができて深く絡み合った論理記号を解くことができるのであろう．ともあれ，交換性定理の原点が "函数" の導入を意味する "選択公理"

$$\forall x \in a \exists y R(x, y) \equiv \exists y \forall x \in a R(x, y(x))$$

にあることは確かであろう．このような形式と内容の自然な関係を見つめてゆくことは大切なことと思う．

参考文献

次に記する簡単な表は，当然のことではあるが，とてもこの分野の完全な文献表というようなものではない．この分野に関心を持たれた人は [7]，[9] そして [10] の論文の文献も参照してほしい．

1. Bell, J. L and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts*, North - Holland (1969).
2. Bernstein, Allen R., The Spectral Theorem——A Non-Standard Approach, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 18. (1972). pp. 419–434.
3. Bernstein, A. R., Non Standard Analysis, in *Studies in Model theory,* M. D. Morley, Ed. *Studies in Mathematics* Vol. 8 (1973), pp. 35–58
4. Halmos Paul R., *Measure Theory,* Van Nostland (1950).
5. Halmos Paul R., *Finite - Dimensional Vector Spaces,* 2 nd edit. Van Nostland (1958)
6. Hausner, Melvin, On a Non-Standard Construction of Haar Measure, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), pp. 403–405
7. Hurd Albert (Ed.), *Victoria Symposium on Non-Standard Analysis, Lecture Notes in Mathematies,* No. 369, Springer-Verlag (1974).
8. Luxemburg, W. A. J, *Non-Standard Analysis, Lecture on Robinson's Theory of Infinitesimals and Infinitely Large Numbers,* Pasadena (1962) and revised edition (1964).
9. Luxemburg, W. A. J. (Ed.), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory,* Proceedings of an Internal Symposium on Nonstandard Analysis, Holt-Reinhart and Winston, (1969).
10. Luxemburg, W. A. J. (Ed.), *Contributions to Non-Standard Analysis,* Symposium at Oberwolfach, 1970, North-Holland (1972).
11. Luxemburg, W. A. J., What is Nonstandard Analysis ? in *Papers in the Foundatins of Mathematics, Amer. Math. Monthly,* **80** (1973), No. 6, part II, pp. 38–67
12. Machover, Moshé and Joram Hirschfeld, *Lectures on Non-Standard Analysis, Lecture Notes in Mathematies,* No. 94, Springer-Verlag (1969).
13. Parikh, Robert, A Nonstand ard Theory of Topological Groups, in Luxemburg [9], pp. 279–284.
14. Robinson, Abraham, *Non-Standard Analysis, Studies in Logic and the*

Foundations of Mathematics, North-Holland (1966).

15. Robinsn, Abraham, Nonstandard Theory of Dedekind Rings, *Indag. Math.* 29 (1967), pp. 444-452
16. Robinson, Abraham and Elias Zakon, A Set-Theoretical Characterization of Enlargements, in Luxemburg [9], pp. 109-122.

なお校正時に加えられたものとして：

D. Radolph Johnson によって参考文献の広範囲にわたる集収がなされ，*Lecture Notes in Mathematies No.* 3, として Department of Mathematics and Statistics of the University of Pittsburg より発表されているので，それを参照してほしい．また H. Jerome Keisler の *Elementary Calculus* およびそれに関する教師への参考書として *Foundations, of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Shmidt (1976). そして K. D. Stroyan, W. A. J. Luxemburg, *Introduction to the Theory of Infinitesimals,* Academic Press (1976) も興味あるものであろう．

[訳者注]

邦文書では：

斎藤正彦著　超積と超準解析　東京図書

があり参考文献や超準解析とは何かについて記してある．興味深い入門書である．

演習問題略解

第1章

1. $A, B \in F \to A \cap B \in F$ であるから，$\phi = A \cup B$ より $A \notin F$ または $B \notin F$．これより

$$\mu_F(A) + \mu_F(B) \leq 1$$

である．$\mu_F(A) = 1$ なら

$$\mu_F(A) \leq \mu_F(A \cup B) = 1$$

であり $\mu_F(B) = 1$ でも同様である．$\mu_F(A) = \mu_F(B) = 0$ のときは，F が極大フィルターであるから $I - A, I - B \in F$ である．よって

$$(I - A) \cap (I - B) = I - (A \cup B) \in F$$

したがって $A \cup B \notin F$，これは $\mu_F(A \cup B) = 0$ を意味している．

2. 帰納法が成立することは次のようである．

$$(\forall X \in S_1)(0 \in X \wedge (\forall x \in X)(x + 1 \in X) \to (\forall x \in N)(x \in X))^{\dagger}$$

移行原理によって

$$(\forall X \in {}^*S_1)(0 \in X \wedge (\forall x \in X)(x + 1 \in X) \to (\forall x \in {}^*N)(x \in X))$$

である．N が内集合とすると $N \subset S_0$ だから $N \in {}^*S_1$ であり

$$0 \in N \wedge (\forall x \in N)(x + 1 \in N) \to (\forall x \in {}^*N)(x \in N)$$

である．

$$0 \in N \wedge (\forall x \in N)(x + 1 \in N)$$

であるから，$(\forall x \in {}^*N)(x \in N)$ すなわち ${}^*N \subseteq N$ となるが，これは ${}^*N = N$ の場合を除いて矛盾である．

3. いま $A, B \in {}^*S_i$ とする．

$$(\forall x \in S_i)(\forall y \in x)(y \in S_{i-1})$$

であるから

$$x \in A, y \in B \to \{x\}, \{x, y\} \in {}^*S_i \to \langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in {}^*S_{i+1}$$

よって $A \times B \subseteq {}^*S_{i+2}$．次に

$$C = \{Z \in {}^*U \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)(Z = \langle x, y \rangle)\}$$

とすれば内集合定理によって $A \times B = C \cap {}^*S_{i+2}$ は内集合である．

4. $\sigma(n)$ の定義より

$$(\forall m \in N)(\forall n \in N)(m \in \sigma(n) \equiv^{\dagger\dagger} m \in N \,\&\, m \leq n)$$

移行原理によって

---

† 以下では $\models$，${}^*\!\models$ 等は略記したが適当に補って読んで頂き度い．通常の数学ではこの程度の略記はしばしば為されている．

†† $A \equiv B$ は $(A \to B) \,\&\, (B \to A)$ の略記とする．

$$(\forall m \in {}^*N)(\forall n \in {}^*N)(m \in {}^*\sigma(n) \equiv m \in {}^*N \mathbin{\&} m \leq n)$$

である．また $\mathrm{dom}(\sigma)=N$ より $\mathrm{dom}({}^*\sigma)={}^*N$ であるから，$n \in {}^*N$ に対して

$${}^*\sigma(n)=\{m \in {}^*N \mid m \leq n\}.$$

5. 帰納法の対偶による表現は最小元の存在である．すなわち

$$(\forall X \in S_1)(0 \in X \wedge (\forall x \in X)(x+1 \in X) \to (\forall x \in N)(x \in X))$$

の対偶は

$$(\forall X \in S_1)((\exists x \in N)(x \notin X) \to 0 \notin X \vee (\exists x \in X)(x+1 \notin X))$$

移行原理を用い，ブロック $A=\{\cdots, n-1, n, n+1, \cdots\}$ が内集合とすると，$A \subset {}^*N$ より $A \in {}^*S_1$ であり $0 \notin A$ であることから $(\exists x \in {}^*N)(x \notin A)$，したがって

$$(\exists x \in A)(x+1 \notin A)$$

である．$n \in A, n+1 \notin A$ となる n が存在することになり矛盾である．

6. $r=\{\langle a, b\rangle \mid \models \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}$，$r \subseteq S_i$ とすると，

$$(\forall x \in S_i)(\forall y \in S_i)(\alpha(x, y) \to \langle x, y\rangle \in S_i)$$

$$(\forall x \in S_i)(\forall y \in S_i)(\langle x, y\rangle \in r \equiv \langle x, y\rangle \in S_i \wedge \alpha(x, y))$$

移行原理より

$$(\forall x \in {}^*S_i)(\forall y \in {}^*S_i)({}^*\alpha(x, y) \to \langle x, y\rangle \in {}^*S_i)$$

$$(\forall x \in {}^*S_i)(\forall y \in {}^*S_i)(\langle x, y\rangle \in {}^*r \equiv \langle x, y\rangle \in {}^*S_i \wedge {}^*\alpha(x, y))$$

これより

$${}^*r=\{\langle a, b\rangle \mid * \models {}^*\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\}$$

である．もちろん，通常は

$${}^*r=\{\langle x, y\rangle \mid {}^*\alpha(x, y)\}$$

で十分この意味を了解できる．

7. $B=\mathscr{P}(A)$ として $A \in S_i$ ならば $B \in S_{i+1}$ であり

$$(\forall x \in B)(\forall y \in x)(y \in A) \mathbin{\&} (\forall z \in S_{i+1})((\forall x \in z)(x \in A) \to (z \in B))$$

であるから，移行原理によって

$$(\forall x \in {}^*B)(\forall y \in x)(y \in {}^*A) \mathbin{\&} (\forall z \in {}^*S_{i+1})((\forall x \in z)(x \in {}^*A) \to (z \in {}^*B))$$

である．$C \in {}^*U$，$C \subseteq {}^*A$ とすれば $C \in {}^*S_{i+1}$ であるから，後半より $C \in {}^*B={}^*\mathscr{P}(A)$
逆に，$C \in {}^*B$ とすると前半より $(\forall y \in C)(y \in {}^*A)$ すなわち $C \subseteq {}^*A$ を得る．

第 2 章

1. たとえば $x=\sqrt{2}\,n, n \in {}^*N-N$ を考える．

$$(\forall n \in N^+)(n\sqrt{2} \notin Q)$$

であるから移行原理より

$$(\forall n \in {}^*N^+)(n\sqrt{2} \notin {}^*Q)$$

である．$n\sqrt{2}$ は有限でないので $n\sqrt{2} \notin R$．また，たとえば $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ とか $1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ 等にそれぞれ無限小，有限であって $R \cup {}^*Q$ に属さないものである．

2. $x \approx q \in {}^*Q$ なる q の存在を示すのであるが，次のように考える．

$$(\forall x \in R)(\forall x \in N^+)(\exists m \in Z)\left(\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}\right)$$

ここにZは整数の全体である．移行原理より

$$(\forall x \in {}^*R)(\forall n \in {}^*N^+)(\exists m \in {}^*Z)\left(\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}\right)$$

$x \in {}^*R$ に対して $\nu \in {}^*N - N$ とすると，ある $m \in {}^*Z$ に対して

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$$

となる．$\frac{m}{n} \in {}^*Q$ であり $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n} \approx 0$ であるから$x \approx \frac{m}{n}$ である．

3. (a) $\{s_n | n \in N^+\}$ が有限なら，ある $a \in R$ に対して$(\forall n \in N^+)(|s_n| \leqq a)$ よって，$(\forall n \in {}^*N^+)(|s_n| \leqq a)$ である．有界でないなら

$$(\forall x \in R)(\exists n \in N^+)(|s_n| > x)$$

であるから移行原理より

$$(\forall x \in {}^*R)(\exists n \in {}^*N^+)(|s_n| > x)$$

よって $x \in {}^*R - R$ とすると，ある $n \in {}^*N^+$ について $|s_n| > x$ であるが $n \in N$ とはなり得ない．すなわち $|s_n|$ は有限でなく $n \in {}^*N - N$ である．

(b) 定理 5.3 の意味するところは，ある無限整数 n について $s_n \approx x$ ならばxは$\{s_n\}$ の一つの極限点ということである．

$\{s_n | n \in N^+\}$ が有界とする．$n \in {}^*N - N$ とすると(a)により s_n は有限であるから $x = {}^\circ s_n$ とする．定理 5.3 より x は $\{S_n | n \in N^+\}$ の一つの極限点である．

4. (a) $m = \{\langle x, y \rangle | a \leq x, y \leq b, f(x) \leq f(y)\}$

とすると，$x \in [a, b]$ なら $\langle x, y \rangle \in r$ であるから $\mathrm{dom}(r) = [a, b]$ である．$x_1, \cdots, x_n \in \mathrm{dom}(r)$ として $f(x_i) = \max(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \leq f(x_i)$ であるから $\langle x_1, x_i \rangle \in r, \cdots, \langle x_n, x_i \rangle \in r$ である．すなわち r は共起的である．

(b) f を $[a, b]$ 上の連続函数とする. 上記 r は共起的であるから, 共起性定理によって

$$(\exists y \in {}^*[a, b])(\forall n \in [a, b])(\langle x, y \rangle \in {}^*r)$$

である. この性質を有する y をとり標準部分 $p = {}^\circ y$ をとると $p \in [a, b]$ であり, $x \in [a, b]$ に対しては $f(x) \leq f(y)$ であるから，連続性を用いて

$$f(x) = {}^\circ f(x) \leq {}^\circ f(y) = f({}^\circ y) = f(p).$$

5. $u_n = s_n - L$ とおくと $s_n \to L$ と $u_n \to 0$ は同値であるから, $s_n \to 0$ の場合証明する.

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} \to 0$$

でないとすると，ある無限の ν に対して

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_\nu}{\nu} = y \not\approx 0$$

である．そこで $p = |{}^\circ y|$ とおくと $0 < p$ である．仮定より $s_n \to 0$ であるから，ある $n_0 \in N$ に対して

$$(\forall n \in N)\left(n \geq n_0 \to |s_n| < \frac{p}{2}\right)$$

移行原理によって

$$(\forall n \in {}^*N)\left(n \geq n_0 \to |s_n| < \frac{p}{2}\right)$$

である．したがって

$$\left|\frac{s_1+s_2+\cdots+s_\nu}{\nu}\right| \leq \left|\frac{s_1+\cdots+s_{n_0}}{\nu}\right| + \left|\frac{s_{n_0+1}+\cdots+s_\nu}{\nu}\right|$$

であるが，

$$\left|\frac{s_{n_0+1}+\cdots+s_\nu}{\nu}\right| \leq \frac{(\nu-n_0)\cdot\frac{p}{2}}{\nu} \leq \frac{p}{2}$$

である．したがって $^\circ((s_1+\cdots+s_{n_0})/\nu)=0$ であることを用いると

$$p = \left|{}^\circ\!\left(\frac{s_1+s_2+\cdots s_\nu}{\nu}\right)\right| \leq {}^\circ\!\left|\frac{s_1+\cdots+s_{n_0}}{\nu}\right| + \frac{p}{2} \leq \frac{p}{2}$$

となり矛盾である．

6. $A=\{y \in {}^*R \mid y \approx x\}$ が内的であれば，

$$I=\{y \in {}^*R \mid y \approx 0\}=\{y-x \in {}^*R \mid y \in A\}$$

は内集合定理により内集合であるが，これは矛盾である．

索　引

あ　行

か　行

訳者略歴

難波完爾（なんば かんじ）

1962年　岡山大学理学部数学科卒業
1964年　東京教育大学理学系大学院修士課程修了
1964年　東京教育大学理学部応用数理学科助手
1967年　東京教育大学理学部数学科講師
1968年　理学博士
1970年　名古屋大学教養部助教授
1980年　東京大学教養学部助教授となり現在に至る

主要著書

集合論（サイエンス社，1975）
線形代数学（実教出版，1976）
微分積分学（共著，実教出版，1977）

昭和57年11月30日　初版発行

超準解析
Applied Nonstandard Analysis

原著者　M. デービス
訳　者　難波完爾
発行者　山本健二
発行者　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102
電話（03）262-5256（代表）・振替東京4-44725

定価 ¥ 2900.

寿印刷・牧製本

ISBN4-563-00170-8
C3041 ¥2900E